ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE

INGINERIE FINANCIARĂ
- sinteză -

Prof. univ. dr. Moisă Altăr

© 2002 by Moisă Altar. All rights reserved. Short sections of text, not exceeding two paragraphs may be quoted without permission provided that full credit, including the © notice, is given to the source.

© Copyright 2002, Moisă Altar. Toate drepturile asupra acestei lucrări aparțin autorului. Scurte fragmente de text, care nu depăşesc două paragrafe pot fi citate fără permisiunea autorului dar cu menționarea sursei.

Bucureşti, ianuarie 2002

Capitolul 1. Introducere.

Sistemul financiar joacă un rol fundamental în funcționarea economiei moderne. Cercetări recente au evidențiat rolul major ce revine sistemului financiar în procesul creşterii economice. Pe lângă factorii tradiționali, respectiv investițiile în capitalul fizic şi în capitalul uman, sistemul financiar joacă un rol important în procesul creşterii economice.

În arhitectura sistemului financiar, piața de capital joacă un rol central, ea reprezentând un adevărat catalizator pentru întreaga activitate economică.

În ultimele decenii piața de capital s-a dezvoltat continuu prin apariția de noi produse financiare , de noi mecanisme şi de noi segmente. Acest proces continuă şi în prezent, el amplificându-se odată cu adâncirea globalizării şi mondializării piețelor de capital.

Un segment foarte alert şi care se dezvoltă continuu în cadrul pieței de capital este cel al produselor derivate. Deşi relativ tânăr, volumul zilnic al tranzacțiilor pe piața de derivative însumează multe zeci de miliarde USD.

Un produs financiar derivat (**derivativ**) este un instrument financiar al cărei valoare depinde de valoarea altor active sau produse financiare, numite active suport.

Principalele produse derivate utilizate în prezent pe piața financiară sunt:

- contractele forward
- contractele futures
- swap-uri
- opțiunile

În ceea ce priveşte opțiunile, trebuie menționat că în prezent se utilizează o varietate extrem de mare de astfel de instrumente derivate, multe dintre ele intrând în aşa numita categorie a opțiunilor exotice.

Întrucât un volum extrem de mare de opțiuni şi alte derivative se negociază pe aşa numita piață OTC (over – the – counter) direct între diverse instituții financiare, bănci, fonduri mutuale sau companii, prin introducerea de noi clauze în contractele de opțiuni se obțin în permanență noi tipuri de opțiuni exotice, care dacă dau rezultate favorabile sunt adoptate de lumea financiară.

Prima piață organizată pe care să se negocieze contracte de opțiuni standardizate a apărut în anul 1973 la Chicago, CBOE (Chicago Board Options

Exchange). Ulterior opțiunile au fost negociate şi la American Stock Exchange, la Pacific Stock Exchange, Philadelphia Exchange, NYSE, Londra, Paris, Amsterdam, etc.

În ceea ce priveşte <u>activul suport</u> al unui produs financiar derivat, acesta poate fi:

- acțiuni
- obligațiuni
- indici bursieri
- cursul de schimb
- bunuri de diverse tipuri: petrol, cereale, aur sau alte metale prețioase, etc.

Produsele derivate sunt utilizate în trei scopuri principale, şi anume:

- pentru operații de acoperire împotriva diverselor categorii de risc – <u>hedging</u>
- pentru speculații pe piața financiară
- pentru operații de arbitraj

De aici rezultă şi cele trei categorii mari de operatori (traders) pe piața de derivative: <u>hedgers</u>, <u>speculators</u>, <u>arbitrageurs</u>.

Apariția derivativelor a modificat fundamental structura activităților financiare, în special în țările dezvoltate. În primul rând, produsele derivate permit o mai bună protejare împotriva riscului a investitorilor şi a altor categorii de oameni de afaceri. În al doilea rând, produsele derivate permit realizarea unor operații de levier extrem de eficiente. Acestea au condus la amplificarea activităților de investiții, având puternice implicații atât asupra instituțiilor financiare, cât şi al instituțiilor nefinanciare.

Totodată prețurile produselor financiare derivate care reflectă anticipările agenților economici privind evoluțiile ce vor avea loc în economie permit o mai bună prognoză macroeconomică, o mai bună fundamentare a deciziilor de politică monetară pe care le adoptă băncile centrale ş.a.

În sfârşit, dar nu şi în ultimul rând, apariția derivativelor a condus la un avânt extraordinar al <u>ştiinței</u> <u>financiare</u>. Apariția în anul 1973 a celebrului model Black-Merton-Scholes de evaluare a opțiunilor a deschis practic o nouă eră în domeniul ştiinței finanțelor.

Capitolul 2. Noțiuni fundamentale

În acest paragraf vor fi introduse primele noțiuni fundamentale privind produsele financiare derivate, precum şi unele mecanisme care guvernează piața de capital.

a. Arbitraj financiar

Prin **arbitraj financiar** vom înțelege posibilitatea realizării unei tranzacții prin care se poate obține un câştig fără ca operatorul să-şi asume un risc sau să investească capital.

Întrucât pe piața de capital este retribuit numai capitalul şi riscul asumat, arbitrajul financiar reprezintă o stare anormală a pieței, respectiv o stare de non-echilibru. Întrucât astfel de stări pot exista numai pe perioade foarte scurte de timp, ele sunt, în general, ignorate de teoria financiară modernă.

În foarte multe raționamente şi calcule legate de evaluarea produsele financiare, inclusiv a derivativelor, de presupune că **piața nu permite operații de arbitraj financiar**.

Vom spune că efectuăm un raționament de arbitraj financiar dacă în cadrul raționamentului eliminăm posibilitatea realizării de operații de arbitraj.

Conform raționamentului de arbitraj financiar **două instrumente financiare care produc acelaşi efect trebuie să aibă acelaşi preț**.

Operațiile de arbitraj financiar nu trebuie confundate cu **operațiile speculative** în care operatorul îşi asumă un risc pentru care aşteaptă o recompensă. Dintr-o operație speculativă operatorul poate avea fie un câştig, fie o pierdere.

b. Short selling (*shorting*)

Este o operație speculativă prin care un investitor vinde un activ pe care nu îl posedă, el fiind de cele mai multe ori împrumutat de brokerul său. Investitorul urmează să cumpere în scurt timp activul şi să-l restituie brokerului. Operațiile de short selling sunt reglementate prin statutul pieței. Pentru unele tipuri de active reglementările nu permit operații de short selling.

În general , speculatorii efectuează operații de short selling când anticipează o scădere a prețului activului, dorind să vândă mai scump pentru ca ulterior să cumpere mai ieftin pentru a stinge împrumutul. Evident că dacă anticiparea nu a fost corectă investitorul poate pierde dintr-o operație de short selling.

c. Rata dobânzii continue

Dacă se notează cu R rata dobânzii care se referă la un an, pentru fracțiuni de an se folosesc în mod obişnuit două tipuri de rate ale dobânzii:

- rata comercială: $\frac{R}{n}$;
- rata corectă: $\frac{r_n}{n}$, unde cu r_n s-a notat rata de conversie, soluție a ecuației:

$$\left(1+\frac{r_n}{n}\right)^n = 1+R \tag{2.1}$$

respectiv:

$$r_n = n\left[(1+R)^{1/n} - 1\right] \tag{2.2}$$

S-a presupus că dobânda este compusă iar cu n s-a notat numărul de intervale în care a fost împărțit anul.

Între cele două rate ale dobânzii pot exista diferențe semnifiactive care se amplifică odată cu creşterea lui n.

De exemplu, dacă $R = 15\%$, rata dobânzii comercială pentru un semestru este de 7,5 %, iar pentru o lună ea este de 1,25%. În realitate, o rată a dobânzii de de 7,5% pe semestru corespunde la o rată a dobânzii de 15,56% pe an $\left((1+0{,}075)^2 - 1 = 0{,}1556\right)$, iar o rată a dobânzii de 1,25% pe lună corespunde la o rată anuală de 16,075% pe an $\left((1+0.0125)^{12} - 1 = 0.16075\right)$.

Pentru cazul considerat, rata corectă pentru un semestru este de 7,238%, iar pentru o lună ea este de 1,17%.

Pentru $n = 2$, rata de conversie $r_n = n\left[(1+R)^{1/n} - 1\right]$ este egală cu $r_2 = 14{,}476\%$, iar pentru $n = 12$ ea este egală cu $r_{12} = 14{,}058\%$.

Cu cât n este mai mare, cu atât rata de conversie este mai corectă. Aceasta a condus la utilizarea ratei instantanee, respectiv la **rata dobânzii continue**:

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+R)^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(1+R) \qquad \textbf{(2.3)}$$

Aşadar, între rata dobânzii obişnuite R şi rata dobânzii continue r, avem relația:

$$r = \ln(1+R) \qquad \textbf{(2.4)}$$

În cazul exemplului ales, rata dobânzii de $R = 15\%$, corespunde unei rate a dobânzii continue de 13,976%.

Factorul de fructificare devine:

$$1 + R = e^{r} \qquad \textbf{(2.5)}$$

iar factorul de actualizare devine:

$$1 + R = e^{-r} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Pentru exemplificare, arătăm că formula care dă prețul unei obligațiuni, în cazul în care se foloseşte rata dobânzii continue devine:

$$P = \sum_{t=1}^{T} C_t e^{-rt} + Fe^{-rt} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Cu C_t s-a notat valoarea cuponului din anul t, cu F s-a notat valoarea nominală, iar cu T s-a notat scadența (maturitatea) obligațiunii.

Pentru o obligațiune zero-cupon având maturitatea T, valoarea nominală $F = 1$ şi prețul la momentul t egal cu $B(t,T)$, rentabilitatea la scadență (yieldul la maturitate) este dată de formula:

$$y = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t} \qquad \textbf{(2.8)}$$

care este soluția ecuației:

$$B(t,T) = 1 \cdot e^{-y(T-t)} \qquad \textbf{(2.9)}$$

De exemplu, dacă $t = 0$, iar o obligațiune zero-cupon având maturitatea peste 3 ani $(T = 3)$ are prețul $B(0,3) = 0{,}8$, atunci rentabilitatea la scadență va fi:

$y = -\ln(0{,}8)/3 = 7{,}44\%$.

d. Contracte forward

Cel mai simplu derivativ este contractul forward. Un contract forward este o înțelegere între două părți de a vinde, respectiv de a cumpăra un anume activ financiar sau un bun la o scadență şi un preț stabilite prin contract.

Contractele forward se tranzacționează pe piețele OTC ("over-the-counter") şi ele se încheie, în mod obişnuit, între două instituții financiare sau între o instituție financiară şi o instituție non-financiară (de exemplu o companie).

Se spune că partea care se angajează să cumpere activul sau bunul respectiv are o **poziție long**, iar cea care se angajează să vândă are o **poziție short**.

La emitere valoarea (prima) unui contract forward este zero, deoarece niciuna dintre părți nu obține prin contract o situație privilegiată. Aşa cum se va vedea în continuare, această situație nu mai este valabilă în cazul opțiunilor, unde operatorul care are poziția long are dreptul, dar nu şi obligația de a cumpăra activul, respectiv bunul care face obiectul contractului.

Dintr-un raționament de arbitraj rezultă că pentru un activ care nu generează venit pe perioada la care se referă contractul, prețul forward (prețul de livrare) este:

$$F(0,T) = S_0 e^{rt} \tag{2.10}$$

Cu S_0 s-a notat prețul spot al activului sau bunului, cu T s-a notat scadența, iar cu $F(0,T)$ s-a notat prețul forward.

Pentru un activ care pe perioada de existență a contractului generează un venit având valoarea actualizată V_0, prețul forward va fi:

$$F(0,T) = (S_0 - V_0)e^{rT} \tag{2.11}$$

De exemplu, dacă contractul forward se referă la o acțiune care dă dividend, rata instantanee a dividendului fiind $q\%$, prețul forward va fi:

$$F(0,T) = S_0 e^{(r-q)T} \tag{2.12}$$

Pentru a demonstra formula (2.12), vom observa că venitul generat prin dividend în perioada $[0,T]$ este:

$$V_T = S_0 e^{qT} - S_0 \tag{2.13}$$

Valoarea actuală este:

$$V_0 = V_T e^{-qt} = S_0 - S_0 e^{-qt} \tag{2.14}$$

Înlocuind pe V_0 în formula (2.11) se obține formula (2.12).

Exemplu. Considerăm un contract forward pentru o acțiune al cărei preț spot este $S_0 = 80$ u.m., având scadența peste 6 luni $(T = 0{,}5)$. În cazul în care acțiunea este ex-dividend iar rata dobânzii este $r = 10\%$, prețul forward va fi:

$F(0\,;0{,}5) = 80 \cdot e^{0{,}1 \cdot 0{,}5} = 84{,}10$ u.m.

În cazul în care acțiunea dă dividend, rata instantanee a dividendului fiind $q = 2\%$, prețul forward va fi:

$F(0\,;0{,}5) = 80 \cdot \mathrm{e}^{(0{,}1\text{-}0{,}02) \cdot 0{,}5} = 83{,}26$ u.m.

Trebuie menționat că valoarea (prima) unui contract forward este zero numai în momentul inițial:

$$f_0 = 0 \tag{2.15}$$

Pe perioada de viață a contractului, prima contractului poate fi diferită de zero. Într-adevăr, prețul forward în momentul t va fi:

$$F(t,T) = S_t e^{r(T-t)} \tag{2.16}$$

iar prima de contract va fi:

$$f_t = \left[F(0,T) - F(t,T)\right] e^{-r(T-t)} \tag{2.17}$$

Din (2.17) rezultă:

$$f_t = \left(S_0 e^{rT} - S_t e^{r(T-t)}\right) e^{-r(T-t)}$$

de unde:

$$f_t = S_0 e^{rt} - S_t \tag{2.18}$$

Evidend că semnul lui f_t poate fi pozitiv sau negativ, după cum $S_0 e^{rt} > S_t$ sau $S_0 e^{rt} < S_t$. Dacă $S_0 e^{rt} = S_t$, prima f_t este egală cu zero.

Exemplu. Un contract forward având scadența peste un an are ca suport o acțiune al cărei curs spot este $S_0 = 85$ u.m. rata dobânzii este $r = 12\%$. Acțiunea este ex-dividend. După 6 luni cursul spot al acțiunii este 87 u.m. în acest caz valoarea contractului forward este:

$f_{0,5} = 85 \cdot e^{0{,}12 \cdot 0{,}5} - 87 = 90{,}256 - 87 = 3{,}256$

e. Contracte futures

Contractele futures au aceleaşi caracteristici ca şi contractele forward, cu deosebirea că se tranzacționează pe piețe organizate şi sunt standardizate.

Pentru majoritatea contractelor futures, operatorii îşi închid poziția înainte de scadență. Închiderea poziției se poate face relativ simplu luând o poziție contrară cu cea avută (long sau short) într-un contract futures similar. Este important de menționat că pentru numeroase tipuri de active sau produse, prețurile futures se publică zilnic presa financiară.

f. Tipuri de opțiuni

Contractele forward sau futures obligă ambele părți contractante ca la scadență să onoreze contractul. Este evident că, în general, una dintre părți va fi dezavantajată. În cazul în care poziția pe un contract futures va fi închisă înainte de scadență, operatorul va fi obligat să ia poziție pe un alt contract futures sau pe activul suport.

Spre deosebire de contractele forward sau futures, opțiunile obligă numai una dintre părți să onoreze contractul (poziția short), lăsând libertatea celeilalte părți (poziția long) să decidă dacă onorează sau nu contractul.

Este evident că, pentru acest drept pe care-l obține, operatorul care are poziția long pe un contract de opțiuni va plăti, la încheierea contractului, o primă operatorului care are poziția short.

În funcție de dreptul de a cumpăra sau de a vinde un anumit activ, opțiunile se împart în două mari categorii:

- Opțiuni CALL (de cumpărare)
- Opțiuni PUT (de vânzare)

Opțiunea CALL dă dreptul de a cumpăra la un termen stabilit, la un preț stabilit prin contract (prețul de exercițiu), activul care face obiectul contractului (activul suport).

Dacă notăm cu S – prețul activului suport şi cu E – prețul de exercițiu prevăzut în contract, la scadență valoarea unei opțiuni CALL este egală cu:

$$\max(S-E,0) \tag{2.19}$$

Este evident că dacă S>E, atunci posesorul opțiunii va cumpăra activul exercitându-şi opțiunea, având astfel un câştig brut egal cu S-E. În cazul în care prețul pe piață a activului este mai mic decât prețul de exercițiu prevăzut în contractul de opțiune (S<E) atunci, evident că, operatorul va cumpăra activul direct pe piață, iar valoarea opțiunii este egală cu zero.

Funcția (2.19) se numeşte **funcția de payoff** şi ea dă valoarea profitului brut pe care-l obține posesorul opțiunii. Pentru a obține valoarea profitului net, din payoff trebuie scăzută prima plătită de operatorul care a cumpărat opțiunea (poziția long).

Opțiunea PUT dă dreptul de a vinde la un termen stabilit şi la un preț stabilit prin contract activul suport.

În cazul opțiunilor PUT, funcția de payoff este:

$$\max(E-S,0) \qquad \textbf{(2.20)}$$

Operatorul matematic „max” din funcțiile de payoff (2.19) şi (2.20), în fapt, cuantifică opționalitatea pe care o are poziția long de a-şi exercita sau nu contractul.

Din punctul de vedere al modului de exercitare al opțiunilor se disting două mari categorii de opțiuni:

- Opțiunile de tip european care pot fi exercitate numai la scadență;
- Opțiunile de tip american care pot fi exercitate, teoretic, în orice moment până la expirarea contractului.

Trebuie menționat faptul că atât în Europa, cât şi pe continentul american se tranzacționează ambele tipuri de opțiuni menționate mai sus. Aşadar, adjectivele „european”, respectiv „american” nu au nimic în comun cu locul geografic în care se tranzacționează opțiunea.

- Opțiunile de tip bermudan sunt opțiunile ce pot fi exercitate în anumite momente, prevăzute în contract.

Aceste tipuri de opțiuni reprezintă un „mix” între opțiunile de tip european şi cele de tip american.

Între bănci sau alte instituții financiare sau între instituții financiare şi companii pot fi încheiate şi aşa numitele opțiuni de **tip exotic**.

- Opțiunile de tip exotic sunt opțiuni nestandard care au prevăzute prin contract o serie de clauze specifice.

De exemplu, **opțiunile de tip asiatic**, sunt opțiuni exotice în care funcția de payoff depinde de prețul mediu al activului suport pe o perioadă specificată în contract.

O altă categorie de opțiuni exotice sunt opțiunile de **tip binar** sau **digitale** pentru care funcția de payoff este o funcție discontinuă ca funcție de prețul activului suport. De exemplu, funcția de payoff poate lua numai valoarea unu sau zero.

Toate categoriile de opțiuni (europene, americane, exotice, etc) sunt de tip CALL (de cumpărare) sau de tip PUT (de vânzare).

În funcție de evoluția prețului activului suport, opțiunile pot fi:

- **at-the-money**, în cazul în care prețul activului suport este egal cu prețul de exercițiu;
- **in-the-money**, în cazul în care funcția de payoff este egală cu $|S-E|$, modul care este strict mai mare ca zero. O opțiune de tip call este in-the-money dacă funcția de payoff este $S-E>0$, respectiv prețul activului suport este mai mare decât prețul de exercițiu. O opțiune de tip put este in-the-money dacă $E>S$, respectiv funcția de payoff este $E-S>0$;
- **out-the-money**, în cazul în care funcția de payoff este zero. O opțiune de tip call este out-the-money dacă $S<E$, iar opțiunea de tip put este out-the-money dacă $S>E$.

g. Duplicarea (clonarea)

Vom spune că un activ sau un derivativ a fost **duplicat** (clonat) dacă s-a reuşit construirea unui portofoliu care să se comporte identic cu activul sau derivativul inițial.

De exemplu, se va vedea mai departe că o acțiune poate fi clonată printr-un portofoliu format dintr-o obligațiune (poziție long) şi un număr de opțiuni (poziție short).

h. Prima (valoarea) unei opțiuni

Valoarea unei opțiuni reprezintă prima plătită la semnarea contractului sau prețul la care ea se tranzacționează pe piață la un moment ulterior emiterii.

La scadență valoarea unei opțiuni este egală cu funcția de payoff.

Dacă se notează cu C – valoarea unei opțiuni call şi cu P – valoarea unei opțiuni put, ambele sunt funcții de următoarele cinci variabile:

S – prețul activului suport;

E – prețul de exercițiu;

σ – volatilitatea activului suport;

r – rata dobânzii pe piața monetară;

$T-t$ - perioada până la scadență. Cu *T* s-a notat scadența, iar cu *t* momentul curent (la emiterea opțiunii *t=0*).

Unitatea de măsură a perioadei $T-t$ este anul. Rezultă că $T-t$ se măsoară în fracțiuni de an, <u>anul financiar</u> având <u>252 de zile</u>.

Dacă se notează generic cu *D* valoarea unui derivativ (call sau put), avem:

$$D = D(S, E, \sigma, r, T-t) \tag{2.21}$$

În raport cu σ şi $T-t$ funcția *D* este crescătoare. Monotonia în raport cu S şi E depinde de tipul de opțiune, respectiv dacă este de tip call sau put.

Trebuie menționat, însă că funcția *D* este omogenă de gradul unu în raport cu S şi E, respectiv dacă S şi E cresc de λ ori şi valoarea derivativului va creşte de λ ori. Rezultă că avem relația:

$$D(\lambda \cdot S, \lambda \cdot E, \sigma, r, T-t) = \lambda \cdot D(S, E, \sigma, r, T-t) \tag{2.22}$$

Întrucât valoarea unui derivativ depinde în mod esențial de evoluția prețului S al activului suport, iar acesta este o variabilă stochastică, în continuare vor fi prezentate unele noțiuni elementare de calcul stochastic.

Capitolul 3. Elemente de calcul stochastic

1. Legea normală. Legea log-normală

Multe fenomene din natură, tehnică şi economie descriu o lege normală sau gausiană. Pentru cunoaşterea unei legi normale sunt suficienți doi parametri, respectiv media, μ, şi varianța σ^2.

Densitatea de repartiție în cazul legii normale este:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(3.1)}$$

iar funcția de repartiție este:

$$F(d) = \int_{-\infty}^{d} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \textbf{(3.2)}$$

Funcția de repartiție, numită şi probabilitatea cumulată cuantifică probabilitatea ca variabila aleatoare care descrie legea normală să aibă o mărime mai mică decât d, respectiv:

$$P(Z \le d) = F(d) \qquad \textbf{(3.3)}$$

Vom nota cu :

$$\Phi(\mu, \sigma) \qquad \textbf{(3.4)}$$

O variabilă aleatoare care este normal distribuită, având media μ şi varianța σ^2.

Distribuția normală pentru care $\mu = 0$ şi $\sigma = 1$ se numeşte distribuția standard.

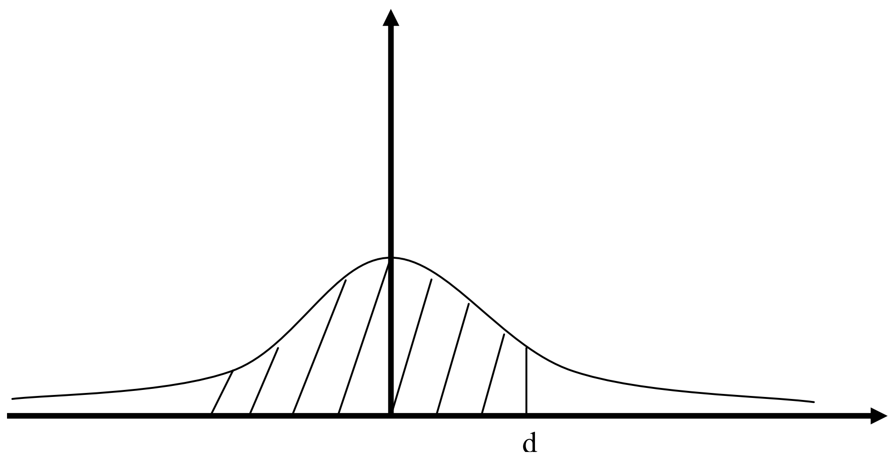
Pentru distribuția normală standard, densitatea de repartiție este:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Pentru distribuția normală standard funcția de repartiție va fi notată cu N în loc de F. Avem:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad \textbf{(3.6)}$$

Din punct de vedere geometric, indicatorul N(d) măsoară aria cuprinsă între graficul funcției *f(x)* (clopotul lui Gauss), axa orizontală şi dreapta de ecuație x=d (vezi fig.1).



Funcția N(d) are următoarele proprietăți:

1. $N(0) = \frac{1}{2}$
2. $N(\infty) = 1$
3. $N(-d) = 1 - N(d)$

Întrucât primitiva funcției (3.5) nu poate fi exprimata prin funcții elementare, pentru calculul integralei (3.6) se utilizează formule de aproximare. Pe baza unor astfel de formule de aproximare sunt întocmite tabele care dau valorile lui N(d) pentru diverse valori date lui d.

Din astfel de tabele se poate vedea, de exemplu că N(1,24)=0,8925. Cu alte cuvinte probabilitatea ca o variabilă distribuită după legea normală standard (media egală cu zero şi varianța egală cu unu) este de 89,25%.

Probabilitatea ca o variabilă distribuită după legea normală standard să ia valori în intervalul $[\alpha, \beta]$ este:

$P(\alpha \le x \le \beta) = P(x \le \beta) - P(x \le \alpha)$, respectiv:

$$P(\alpha \le x \le \beta) = N(\beta) - N(\alpha) \tag{3.7}$$

În cazul particular în care $\alpha = -\beta$ avem:

$$P(-\alpha \le x \le \alpha) = N(\alpha) - N(-\alpha) = N(\alpha) - [1 - N(\alpha)] = 2 \cdot N(\alpha) - 1 \tag{3.8}$$

În formula

$$P(x \le d) = N(d)$$

în mod obişnuit se dă probabilitatea cumulată N(d) şi nu valoarea variabilei d.

Din tabelele privind probabilitatea cumulată la distribuția normală standard rezultă următoarele valori importante pentru parametrul d, corespunzătoare probabilităților egale cu 99%, 97,5%, 95% şi 90%.

Probabilitatea (P)	Pragul d ($x \le d$)
99%	2,33
97,5%	1,96
95%	1,65
90%	1,29

Din tabelul de mai sus rezultă că cu o probabilitate de 99% variabila x distribuită după repartiția normală standard va avea o valoare mai mică decât 2,33, iar cu o probabilitate de 90% va avea o valoare mai mică decât 1,29.

În cazul în care se doreşte valoarea lui x astfel încât să se afle cu o probabilitate dată P în intervalul $[-\beta, \beta]$, prin utilizarea formulei (3.7) avem:

$$P(-\alpha \le x \le \alpha) = 2N(\alpha) - 1$$

rezultă:

Probabilitatea (P)	Pragul α $(-\alpha \leq x \leq \alpha)$
99%	2,58
97,5%	2,24
95%	1,96
90%	1,65

Pe baza tabelului de mai sus putem scrie că:

$P(-1{,}96 \leq x \leq 1{,}96) = 95\%$

în cazul în care în locul distribuției normale standard $\Phi(0{,}1)$ considerăm o distribuție normală $\Phi(\mu,\sigma)$ atunci din formula:

$P(-\alpha \leq x \leq \alpha) = 2N(\alpha) - 1$

făcând substituția :

$$x = \frac{Z - \mu}{\sigma}$$

rezultă:

$$P(\mu - \alpha \cdot \sigma \leq Z \leq \mu + \alpha \cdot \sigma) = 2N(\alpha) - 1 \qquad \textbf{(3.9)}$$

Cu Z s-a notat variabila aleatoare a cărei lege de distribuție este $\Phi(\mu,\sigma)$.

De exemplu, pentru o variabilă normal distribuită având media 100 şi abaterea medie pătratică $\sigma = 30\%$, cu o probabilitate de 95% ea se va afla în intervalul:

$100 - 1{,}96 \cdot 0{,}3 \leq Z \leq 100 + 1{,}96 \cdot 0{,}3$,

respectiv:

$99{,}412 \leq Z \leq 100{,}588$

Mai sus s-a ținut seama că pentru o probabilitate de 95%, $\alpha = 1{,}96$.

O variabilă aleatoare *Z* pozitivă are o <u>distribuție log-normală</u> dacă logaritmul său este normal distribuit, respectiv:

$$\log Z \approx \Phi(\mu,\sigma) \qquad \textbf{(3.10)}$$

Pentru variabile aleatoare având o distribuție log-normală, formula (3.9) devine:

$$P(\mu-\alpha\cdot\sigma\leq\log Z\leq\mu+\alpha\cdot\sigma)=2N(\alpha)-1 \tag{3.11}$$

respectiv:

$$P\left(e^{\mu-\alpha\cdot\sigma}\leq Z\leq e^{\mu+\alpha\cdot\sigma}\right)=2N(\alpha)-1$$

De exemplu, dacă $\log Z\approx\Phi(0,2;0,3)$, respectiv variabila *logZ* este normal distribuită cu $\mu=0,2$ şi $\sigma=0,3$, atunci cu o probabilitate de 95%, variabila se va afla în intervalul:

$$e^{0,2-1,96\cdot 0,3}\leq Z\leq e^{0,2+1,96\cdot 0,3}$$

respectiv:

$$0,6784\leq Z\leq 2,1990$$

Mai sus cu *log* s-a notat logaritmul natural, care, în mod obişnuit se notează cu *ln*.

2. Procese Wiener. Procese Ito

Vom considera o variabilă $x(t)$ care evoluează în timp într-un mod aleatoriu. O astfel de variabilă va fi numită variabilă aleatoare. Dacă variabila aleatoare poate lua numai anumite valori precizate , ea se numeşte variabilă aleatoare discretă. Dacă variabila aleatoare poate lua orice valoare din $\Re$, ea se numeşte continuă.

Rezultă că pentru variabilele aleatoare discrete avem:

$$x(t)\in A_t$$

iar pentru variabilele aleatoare continue avem:

$$x(t)\in\Re$$

Mai sus, mulțimea A_t este precizată pentru fiecare moment *t.*

În cazul în care pentru fiecare moment *t* cunoaştem şi legea de distribuție a variabilei *t* vom spune că avem un proces stochastic.

Procesul stochastic se numeşte proces discret dacă variabila temporală *t* poate lua valori numai într-o anumită mulțime de puncte, bine precizată. Dacă $t\in\Re$ sau lui $\Re_+$, procesul stochastic se numeşte proces continuu.

Vom spune că procesul stochastic $x(t)$ este un <u>proces Markov</u> (are proprietatea lui Markov) dacă pentru a face o predicție privind evoluția sa viitoare este suficient să cunoaştem numai starea sa actuală $x(t_0)$ şi nu întreaga sa istorie, respectiv pe ce traiectorie a ajuns starea actuală $x(t_0)$.

Unul dintre cele mai simple tipuri de procese stochastice sunt <u>procesele Wiener</u>.

Ele poartă numele matematicianului american Norbert Wiener, unul dintre cei mai celebri specialişti în domeniul teoriei predicției din secolul al XX -lea, fondator al ciberneticii.

Variabila $x(t)$ descrie un proces Wiener, dacă variația sa Δx într-un interval mic de timp este:

$$\Delta x = a \cdot \Delta t + b \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \qquad \textbf{(3.12)}$$

unde:

a, b – constante cunoscute

ε – variabilă aleatoare având o distribuție normală standard.

Notând cu E operatorul de medie, rezultă că:

$E(\varepsilon)=0$ şi $\sigma_\varepsilon{}^2 = E(\varepsilon^2)-[E(\varepsilon)]^2 = E(\varepsilon^2)=1$

Media, respectiv varianța lui Δx sunt:

$$\begin{aligned} E(\Delta x) &= a \cdot \Delta t \\ \sigma_{\Delta x}{}^2 &= b^2 \cdot \Delta t \cdot E(\varepsilon^2) = b^2 \cdot \Delta t \end{aligned} \qquad \textbf{(3.13)}$$

În cazul în care considerăm că intervalul de timp Δt este egal cu unitatea (1 an) atunci avem:

$$\begin{aligned} E(\Delta x) &= a \\ \sigma_{\Delta x}{}^2 &= b^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Din formula (3.14) rezultă cu claritate semnificația parametrilor a şi b, şi anume:

a – este media anuală a variabilei *x*;

b – este abaterea medie standard (volatilitatea anuală) a variabilei x.

Folosind notațiile consacrate, formula (3.12) se poate scrie:

$$\Delta x = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \tag{3.15}$$

În cazul în care avem:

$$\mu = 0 \text{ şi } \sigma = 1 \tag{3.16}$$

iar pentru acest caz special vom schimba litera x cu z, avem:

$$\Delta z = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \tag{3.17}$$

Pentru Δz avem:

$$\begin{aligned} E(\Delta z) &= 0 \\ \sigma_z^{\ 2} &= \Delta t \end{aligned} \tag{3.18}$$

Procesul Wiener particular dat de formula (3.17) se numeşte <u>mişcare browniană</u>, fiind pus în evidență în secolul al XIX-lea de botanistul Brown.

Mişcarea browniană se caracterizează prin faptul că o particulă car descrie acest proces, se mişcă la întâmplare, având media zero şi varianța egală cu $\sqrt{\Delta t}$.

Întrucât abaterea medie pătratică măsoară gradul de incertitudine (volatilitatea) rezultă că aceasta creşte odată cu timpul (cu Δt).

Folosind (3.17), formula (3.15) a procesului Wiener se mai poate scrie:

$$\Delta x = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta z \tag{3.19}$$

Trebuie menționat că uneori procesul (3.17) se mai numeşte <u>proces Wiener fundamental</u>, iar procesul (3.19) <u>proces Wiener generalizat</u>.

Dacă în formula (3.12), coeficienții a şi b sunt funcții de t şi x şi nu constante, avem un <u>proces Ito</u>. Rezultă că un proces Ito este un proces stochastic descris de următoarea formulă:

$$\Delta x = a(t,x) \cdot \Delta t + b(t,x) \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$$

sau

$$\Delta x = a(t,x) \cdot \Delta t + b(t,x) \cdot \Delta z \tag{3.20}$$

În cadrul cursului vor fi considerate numai cazuri simple în care funcțiile *a* şi *b* sunt funcții liniare.

În cazul în care intervalul de timp Δt este foarte mic ($\Delta t \to 0$), acesta va fi notat cu notația consacrată în calculul diferențial, respectiv cu *dt*.

Rezultă că pentru <u>cazul continuu</u> ecuațiile (3.19) şi (3.20) care descriu procesele Wiener, respectiv Ito, se scriu astfel:

$$dx = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \qquad \textbf{(3.21)}$$

$$dx = a(t,x) \cdot dt + b(t,x) \cdot dz \qquad \textbf{(3.22)}$$

Ecuațiile (3.21) şi (3.22) sunt <u>ecuații diferențiale stochastice</u>.

3. <u>Prețul unui activ ca proces stochastic</u>

Vom considera un activ având la momentul *t* prețul $S(t)$. Mărimea $S(t)$ poate reprezenta prețul spot al unei acțiuni al unui bun fizic (aur, petrol, etc), cursul valutar, etc.

Vom considera un interval de timp $\Delta t = t - t_0$, precum şi creşterea corespunzătoare a prețului $\Delta S = S(t) - S(t_0)$.

Creşterea relativă a prețului S se poate scrie:

$$\frac{S(t)}{S(t_0)} = \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \cdot \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{S(t)}{S(t_{n-1})} \qquad \textbf{(3.23)}$$

Mai sus, intervalul de timp $[t_0, t]$ a fost partiționat astfel:

$t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots\ldots \le t_{n-1} \le t_n = t$

Prin logaritmare, relația (3.23) devine:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \qquad \textbf{(3.24)}$$

Considerând variabilele $\ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$ ca fiind variabile aleatoare oarecare, independente şi cu varianţa finită, conform TEOREMEI LIMITĂ CENTRALĂ, din calculul probabilităţilor se ştie că pentru n foarte mare, suma acestora tinde la o distribuţie normală.

Rezultă că $\ln\frac{S_t}{S_0}$ este normal distribuit, respectiv $\frac{S_t}{S_0}$ are o distribuţie log-normală.

Mai sus a fost schiţată justificarea ipotezei conform căreia cursul unei acţiuni, cursul valutar şi în general preţul unui activ descrie o lege log-normală.

Această ipoteză este fundamentală în domeniul finanţelor moderne.

Întrucât rentabilitatea unei acţiuni ex-dividend se poate scrie:

$$R=\frac{\Delta S}{S}=\frac{S_t-S_0}{S_0}=\frac{S_t}{S_0}-1$$

rezultă că

$$\frac{S_t}{S_0}=1+R \tag{3.25}$$

Din formula de mai sus, rezultă că

$$\ln\frac{S_t}{S_0}=\ln(1+R)\approx R \tag{3.26}$$

Formula (3.26) valabilă pentru cazul în care rentabilitatea R nu are valori exagerat de mari, arată că rentabilitatea unui activ este normal distribuită, $\ln\frac{S_t}{S_0}$ fiind normal distribuit.

În aproximarea (3.26) a fost utilizată formula cunoscută conform căreia pentru valori mici ale lui x avem:

$$\ln(1+x)\approx x$$

Întrucât rentabilitatea $\frac{\Delta S}{S}$ are o distribuţie normală, este valabilă relaţia:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta z \qquad \textbf{(3.27)}$$

Cu μ s-a notat rentabilitatea anuală, iar cu σ volatilitatea anuală a prețului *S*. Formula (3.27) se mai poate scrie:

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta z \qquad \textbf{(3.28)}$$

respectiv

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz \qquad \textbf{(3.29)}$$

Exemplu:

Vom presupune că se cunosc următoarele date:

$S = 50; \mu = 14\%; \sigma = 25\%$

În acest caz formula (3.27) devine

$$\Delta S = 7{,}00 \cdot \Delta t + 12{,}5 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \qquad \textbf{(3.30)}$$

Am înlocuit $\Delta z = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$.

Presupunând că Δt este de cinci zile, respectiv $\Delta t = \frac{5}{252} = 0{,}0198$, obținem:

$$\Delta S = 0{,}139 + 1{,}76 \cdot \varepsilon \qquad \textbf{(3.31)}$$

Formula (3.31) arată că variația prețului S pe o perioadă de 5 zile are o distribuție normală, cu media egală cu 0,139 şi abaterea medie standard egală cu 1,76%.

4. Lema lui Ito

Lema lui Ito joacă un rol fundamental în calculul stochastic.

În cele ce urmează ea va fi prezentată fără demonstrație, insistându-se, în special, asupra modului ei de utilizare.

Lema lui Ito generalizează regulile de derivare din analiza matematică clasică.

Se ştie că în cazul în care avem o funcție derivabilă de forma:

$$Y = F(t,x) \tag{3.32}$$

În care nu apare nici un element stochastic, diferențiala sa este:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx \tag{3.33}$$

În cazul în care variabila *x*, la rândul său, depinde de variabila *t* şi o altă variabilă *z*:

$$Y = F(t, x(t,z)) \tag{3.34}$$

avem:

$$dY = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right)dt + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}dz \tag{3.35}$$

În cazul în care în formula (3.34) apar şi elemente stochastice, formula (3.35) nu mai este valabilă.

În calculul cu produse derivate apar astfel de situații întrucât valoarea acestora depinde de prețul activului suport care, la rândul său, evoluează aleatoriu.

Lema lui Ito permite soluționarea unor astfel de situații.

Vom considera situația în care valoarea derivativului *D* este dată de formula

$$D = D(t, x(t)) \tag{3.36}$$

Unde $x(t)$ este un proces stochastic de tip Ito. Ecuația de dinamică pentru $x(t)$ este:

$$dx = a(t,x)dt + b(t,x)dz \tag{3.37}$$

Unde dz este un proces Wiener fundamental:

$$dz = \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \tag{3.38}$$

<u>**Lema lui Ito**</u> afirmă că:

$$dD = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial x} \cdot a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial D}{\partial x} \cdot b \cdot dz \tag{3.38}$$

În cazul unui proces stochastic discret:

$$\Delta x = a(t,x)\Delta t + b(t,x)\Delta z \tag{3.39}$$

cu

$$dz = \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \tag{3.40}$$

Formula (3.38) devine:

$$\Delta D = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial x} \cdot a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} b^2 \right) \Delta t + \frac{\partial D}{\partial x} \cdot b \cdot \Delta z \tag{3.41}$$

Formulele (3.38) şi (3.41) arată faptul că dacă $x(t)$ este un proces Ito continuu, respectiv discret, atunci şi $D(t,x(t))$ este un proces Ito de aceeaşi natură cu $x(t)$.

Ceea ce se modifică pentru procesul $D(t,x(t))$ este <u>driftul,</u> respectiv coeficientul lui dt (sau Δt în cazul discret), precum şi coeficientul lui dz (sau Δz) care se amplifică cu $\frac{\partial D}{\partial x}$.

5. *Aplicații ale lemei lui Ito*

a) Ecuația de dinamică a unui derivativ de tip opțiune

Vom presupune că ecuația de dinamică a prețului *S* al activului suport este de forma:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz \qquad \textbf{(3.42)}$$

unde μ este media, iar σ este volatilitatea anuală a prețului *S*.

Vom nota cu $D(t, S(t))$ valoarea unui derivativ având ca activ suport pe $S(t)$. Conform lemei lui Ito, avem:

$$dD = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \right) dt + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot dz \qquad \textbf{(3.43)}$$

iar pentru cazul discret avem:

$$\Delta D = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} \sigma^2 \cdot S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot \Delta z \qquad \textbf{(3.44)}$$

Exemplu:

Presupunem că media anuală a rentabilității activului suport este $\mu = 0{,}15$, iar volatilitatea este $\sigma = 10\%$.

În acest caz, formula (3.42) de dinamică a activului suport devine:

$$dS = 0{,}15 \cdot S \cdot dt + 0{,}1 \cdot S \cdot dz \qquad \textbf{(3.42')}$$

iar ecuația de dinamică a derivativului devine:

$$dD = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot 0{,}15 \cdot S + 0{,}005 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} \cdot S^2 \right) dt + 0{,}1 \frac{\partial D}{\partial S} \cdot S \cdot dz \qquad \textbf{(3.43')}$$

b) Ecuația de dinamică a unui derivativ de tip contract forward

Vom considera un contract de tip forward având ca activ suport o acțiune ex-dividend, dinamica prețului acțiunii fiind dată de ecuația (3.42). prețul forward la momentul t este:

$$F(t,S) = S \cdot e^{r(T-t)} \tag{3.45}$$

Cu T s-a notat scadența contractului.

Pentru a putea aplica formula (3.43) vom calcula, în prealabil, derivatele parțiale ale lui F.

Din formula (3.45) avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -r \cdot S \cdot e^{r(T-t)} \\ \frac{\partial F}{\partial S} &= e^{r(T-t)} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Înlocuind formulele (3.46) în (3.43) se obține:

$$dF = \left(-r \cdot S \cdot e^{r(T-t)} + \mu \cdot S \cdot e^{r(T-t)}\right)dt + S \cdot e^{r(T-t)} \cdot \sigma \cdot dz$$

respectiv:

$$dF = (\mu - r)S \cdot e^{r(T-t)}dt + \cdot S \cdot e^{r(T-t)} \cdot \sigma \cdot dz \tag{3.47}$$

Ținând seama de formula (3.45). formula (3.47) devine:

$$dF = (\mu - r)F \cdot dt + F \cdot \sigma \cdot dz \tag{3.48}$$

Comparând ecuațiile (3.42) şi (3.48), se observă că ele sunt similare, cu deosebirea că, driftul pentru prețul forward este mai mic, respectiv este $\mu - r$.

Ecuația (3.48) se mai poate scrie:

$$\frac{dF}{F} = (\mu - r)\cdot dt + \sigma \cdot dz \qquad \textbf{(3.49)}$$

sau

$$d\ln F = (\mu - r)\cdot dt + \sigma \cdot dz \qquad \textbf{(3.50)}$$

Ecuația (3.50) pune în evidență faptul că prețul forward *F* descrie în perioada de la *t=0* la *t=T* o lege log-normală, cu media $(\mu - r)T$ şi volatilitatea $\sigma\sqrt{T}$.

c) Evoluția logaritmului prețului activului suport

În acest exemplu vom considera că:

$$D = \ln S \qquad \textbf{(3.51)}$$

iar *dS* este dat de ecuația (3.42). Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial D}{\partial S} &= \frac{1}{S} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.52)}$$

Pentru acest caz, ecuația (3.43) devine:

$$d(\ln S) = \left(\frac{1}{S}\mu \cdot S - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 \cdot S^2\right)dt + \frac{1}{S}\cdot \sigma \cdot S \cdot dz \qquad \textbf{(3.53)}$$

respectiv:

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma \cdot dz \qquad \textbf{(3.54)}$$

Ecuația (3.54) pune în evidență faptul că ln*S* are o distribuție normală.

Considerând că la momentul *t=0*, prețul activului este S_0, $\ln\frac{S(T)}{S(0)}=\ln\frac{S(T)}{S_0}$ va avea următoarea distribuție normală:

$$\ln\frac{S(T)}{S_0}\approx\Phi\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T;\sigma\sqrt{T}\right) \qquad \textbf{(3.55)}$$

Aplicând formula (3.9) rezultă că

$$P\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T-\alpha\cdot\sigma\sqrt{T}\le\ln\frac{S(T)}{S_0}\le\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\alpha\cdot\sigma\sqrt{T}\right)=2N(\alpha)-1 \qquad \textbf{(3.57)}$$

În continuare vom prezenta modul în care determinăm, cu o probabilitate stabilită de noi, intervalul în care se va afla prețul activului la momentul *T*.

Vom stabili pragul de probabilitate egal cu 99%, deci

$$2N(\alpha)-1=0.99 \qquad \textbf{(3.58)}$$

Folosind tabelele privind probabilitatea cumulată la distribuția normală, rezultă că $\alpha=2,58$.

Vom presupune că $\mu=0,14;\sigma=24\%;S_0=100$, iar $T=3$ luni, respectiv $T=0,25$.

Înlocuind datele stabilite, rezultă:

$$\left(0,14-\frac{1}{2}\cdot0,24^2\right)\cdot0,25-2,58\cdot0,24\cdot\sqrt{0,25}\le\ln\frac{S_T}{100}\le\left(0,14-\frac{1}{2}\cdot0,24^2\right)\cdot0,25+2,58\cdot0,24\cdot\sqrt{0,25} \qquad \textbf{(3.59)}$$

Efectuând calculele, rezultă:

$$0,0278\text{-}0,3096\le\ln\frac{S_T}{100}\le0,0278+0,3096,$$

respectiv:

$$-0,2818\le\ln\frac{S_T}{100}\le0.3374$$

de unde:

$$e^{-0,2818} \leq \frac{S_T}{100} \leq e^{0.3374}$$

Rezultă că, cu o probabilitate de 99% prețul activului se va afla după 3 luni în intervalul

$$100 \cdot e^{-0,2818} \leq S_T \leq 100 \cdot e^{0.3374}$$

respectiv:

$$75,442 \leq S_T \leq 140,13$$

Reamintim că în momentul inițial prețul a fost de $S_0 = 100$.

Capitolul 4. Modele de evaluare a opțiunilor

Pe baza elementelor de calcul stochastic prezentate în capitolul 3, vom trece la deducerea modelelor de evaluare a opțiunilor.

Vor fi prezentate două tipuri de modele de evaluare a opțiunilor:

- Modelul Black–Scholes;
- Modelul binomial

Trebuie menționat că cele două tipuri de modele sunt înrudite, deşi în aparență ele pornesc de la ipoteze diferite.

Modelul Black–Scholes a fost publicat în anul 1973, iar modelul binomial în anul 1979 de către Cox, Ross şi Rubinstein.

Ambele tipuri de modele se bazează pe raționamente de arbitraj şi hedging şi pornesc de la premisa că piața nu permite operații de arbitraj, în sensul menționat în capitolul 2.

În prealabil, va fi dedusă ecuația diferențială **Black–Merton–Scholes**, a cărei soluție este modelul de evaluare Black–Scholes.

Vom presupune că sunt îndeplinite următoarele ipoteze privind piața şi operațiunile de tranzacții:

a) Prețul activului suport descrie o lege log-normală, respectiv ecuația sa de dinamică este:

$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz$ sau

$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta z$

b) Reglementările pieței permit operațiuni de short selling;

c) Taxele şi costurile de tranzacții sunt nule;

d) Pe perioada de viață a opțiunii, activul suport nu generează venit (dividend). Cu alte cuvinte, dacă activul suport este o acțiune, ea este exemplu-dividend în perioada considerată;

e) Piața nu permite oportunități de arbitraj;

f) Rata dobânzii şi volatilitatea sunt constante pe perioada considerată

Trebuie subliniat faptul că majoritatea ipotezelor prezentate mai sus pot fi relaxate, obținându-se astfel modele de evaluare mult mai apropiate de realitate.

În cadrul acestui curs, vor fi relaxate numai o parte dintre ipoteze, de exemplu cea privind faptul că acțiunea este exemplu-dividend.

Relaxarea ipotezei f), respectiv trecerea la modele de evaluare în condițiile în care rata dobânzii sau/şi volatilitatea sunt stochastice face obiectul unor cursuri mai avansate la nivel de MSc şi PhD.

1. *Ecuația de dinamică Black–Merton–Scholes*

Se consideră un activ al cărui preț are următoarea ecuație de dinamică:

$$\Delta S = \mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta z \qquad \textbf{(4.1)}$$

Vom nota cu D valoarea unui derivativ având drept activ suport pe S.

Vom forma portofoliul având următoarea structură:

- 1 unitate de derivativ, poziție long
- h unități din activul suport, poziție short

Rezultă că valoarea portofoliului este:

$$\Pi = D - hS \qquad \textbf{(4.2)}$$

Mărimea parametrului h va fi determinată ulterior pe baza unor raționamente financiare.

Dinamica portofoliului pe intervalul de timp Δt va fi:

$\Delta\Pi = \Delta D - h\Delta S$

Utilizând ecuația (4.1) şi (3.44), rezultă:

$$\Delta\Pi = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial S^2}\sigma^2 \cdot S^2\right)\Delta t + \frac{\partial D}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot \Delta z - h(\mu \cdot S \cdot \Delta t + \sigma \cdot S \cdot \Delta z)$$

Efectuând grupările se obține:

$$\Delta\Pi = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mu \cdot S\left(\frac{\partial D}{\partial S} - h\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial S^2}\sigma^2 \cdot S^2\right)\Delta t + \cdot\sigma \cdot S\left(\frac{\partial D}{\partial S} - h\right)\cdot \Delta z \qquad \textbf{(4.3)}$$

Vom alege parametrul h astfel încât portofoliul Π să fie „fără risc”, respectiv mărimea $\Delta\Pi$ să nu fie supusă factorilor aleatori.

Singurul element stochastic în ecuația (4.3) este $\Delta z = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$, unde ε este o variabilă aleatoare având distribuția normală standard.

Aşadar vom alege pe h egal cu $\frac{\partial D}{\partial S}$, mărime presupusă constantă pe un interval de timp mic.

$$h = \frac{\partial D}{\partial S} \qquad \textbf{(4.4)}$$

În această situație, ecuația (4.3) devine:

$$\Delta\Pi = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial S^2}\sigma^2 \cdot S^2\right)\Delta t \qquad \textbf{(4.5)}$$

Întrucât, conform ipotezelor făcute, piața nu permite oportunități de arbitraj, variația valorii portofoliului dată de formula (4.5) va coincide cu variația unei sume egale depusă într-un cont bancar. Aceasta deoarece portofoliul:

$$\Pi = D - \frac{\partial D}{\partial S} S \qquad \textbf{(4.6)}$$

este un portofoliu fără risc.

Presupunând că rata dobânzii este *r*, pentru suma depusă într-un cont bancar pe perioada Δt, avem:

$$\Delta\Pi = r \cdot \Pi \cdot \Delta t \qquad \textbf{(4.7)}$$

respectiv

$$\Delta\Pi = r \cdot \left(D - \frac{\partial D}{\partial S} S\right) \cdot \Delta t \qquad \textbf{(4.8)}$$

Din egalarea expresiilor (4.5) şi (4.8) rezultă:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial D}{\partial S} + \sigma^2 \cdot S^2 \, \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = r \cdot D \qquad \textbf{(4.9)}$$

Ecuaţia (4.9) reprezintă ecuaţia Black–Merton–Scholes de dinamică a unui derivativ.

Ecuaţia (4.9) este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi, liniară, de tip parabolic.

Pentru soluţionarea efectivă a ecuaţiei diferenţiale Black– Merton–Scholes este necesar să cunoaştem aşa numitele condiţii finale şi condiţii pe frontieră.

Trebuie menţionat că ecuaţia (4.9) este similară cu aşa-numita ecuaţie a difuziei studiată de fizicieni.

2. *Modelul Black–Scholes de evaluare a unei opţiuni*

În acest paragraf vom presupune că derivativul D este o opţiune CALL (D=C) sau o opţiune PUT (D=P), de tip european.

Pentru cazul în care D=C, la ecuaţia (4.9) se ataşează condiţia finală:

$$C(T,S) = \max(S - E, 0) \qquad \textbf{(4.10)}$$

Precum şi condiţiile pe frontieră:

$$\begin{aligned} &\lim_{S\to 0} C(t,S) = 0 \\ &\lim_{S\to\infty} C(t,S) = \infty \end{aligned} \qquad \textbf{(4.11)}$$

Condiţiile (4.11) care sunt avute în vedere numai din considerente strict tehnice, au o interpretare financiară simplă.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (4.9) cu condiţiile (4.10) şi (4.11) este următoarea:

$$C(t,S) = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) \qquad \textbf{(4.12)}$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

iar $N(d)$ este probabilitatea cumulată pentru distribuția normală standard, respectiv:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Reamintim că valorile pentru $N(d)$ sunt tabelate şi pot fi utilizate ca atare.

Formula (4.12) reprezintă formula (modelul) Black–Scholes pentru calculul valorii unui call european având ca suport o acțiune exemplu-dividend.

O formulă similară se poate deduce şi pentru opțiunile de tip put. Formula Black–Scholes de evaluare a unei opțiuni put este următoarea:

$$P(t,S) = E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \qquad \textbf{(4.14)}$$

Reamintim că probabilitățile cumulate *N(d)* satisfac următoarea relație:

$$N(-d) = 1 - N(d) \qquad \textbf{(4.15)}$$

În formulele lui Black–Scholes (4.12), respectiv (4.13), semnificația indicatorilor este următoarea:

S – cursul activului suport;

E – prețul de exercițiu prevăzut în contract;

σ – volatilitatea anuală a activului suport;

r – rata dobânzii.

Exemplu:

Vom calcula valoarea unei opțiuni call pentru care se cunosc următoarele date:

$S = 80; \sigma = 27\%; r = 10\%$

$E = 80; T\text{-}t = 0{,}5$ (6 luni)

Vom calcula parametrii d_1 şi d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{80}{80} + \left(0{,}1 + \frac{0{,}27^2}{2}\right)\cdot 0{,}5}{0{,}27\cdot\sqrt{0{,}5}}$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}27\cdot\sqrt{0{,}5}$$

Rezultă:

$d_1 = 0{,}35735$ şi

$d_2 = 0{,}16643$

Conform tabelelor privind probabilitatea cumulată la distribuția normală standard, avem:

$N(d_1) = 0{,}63959$; $N(d_2) = 0{,}56609$

Cunoscând valorile pentru $N(d_1)$ şi $N(d_2)$ se poate trece la aplicarea formulei Black–Scholes:

$$C(t,S) = 80\cdot N(d_1) - 80\cdot e^{-0{,}1\cdot 0{,}5} N(d_2)$$

respectiv:

$$C(t,S) = 80\cdot 0{,}63959 - 80\cdot 0{,}95123\cdot 0{,}56609$$

Valoarea rezultată pentru opțiunea call este:

$$C(t,S) = 8{,}0886$$

Rezultă că, pentru cazul considerat, valoarea opțiunii call reprezintă cca 10% din valoarea activului suport.

Vom calcula acum, pentru acelaşi exemplu valoarea opțiunii PUT.

Conform calculelor de mai sus avem:

$$N(-d_1) = 1 - N(d_1) = 1 - 0{,}63959 = 0{,}36041$$

$$N(-d_2) = 1 - N(d_2) = 1 - 0{,}56609 = 0{,}43391$$

Aplicând formulele Black–Scholes pentru opțiuni put, avem:

$P(t,S)=80\cdot e^{-0,1\cdot 0,5}N(-d_2)-80\cdot N(-d_1);$

$P(t,S)=80\cdot 0,95123\cdot 0,43391-80\cdot 0,36041$

Valoarea rezultată pentru opțiunea put este:

$P(t,S)=4,18705$

Observații: Paritatea PUT – CALL

Teorema de paritate put – call se poate demonstra simplu printr-un raționament de tip arbitraj. Ea rezultă, însă, uşor şi din formula Black–Scholes.

Într-adevăr, din formula Black–Scholes pentru opțiuni put avem:

$$P(t,S)=E\cdot e^{-r(T-t)}\cdot N(-d_2)-S\cdot N(-d_1)=E\cdot e^{-r(T-t)}\cdot(1-N(d_2))-S\cdot(1-N(d_1))$$

$$=\left[S\cdot N(d_1)-E\cdot e^{-r(T-t)}\right]+\left[E\cdot e^{-r(T-t)}-S\right]$$

Rezultă:

$$P(t,S)=C(t,S)+\left[E\cdot e^{-r(T-t)}-S\right]$$

sau

$$C(t,S)=P(t,S)+\left[S-E\cdot e^{-r(T-t)}\right] \quad \textbf{(4.16)}$$

Formula (4.16) reprezintă teorema de paritate put-call, ea arătând relația dintre prețul unei opțiuni CALL şi o opțiune PUT având acelaşi activ suport, aceeaşi scadență şi acelaşi preț de exercițiu.

Din relația (4.16) rezultă:

a) Dacă $E<S\cdot e^{r(T-t)}$, atunci:

$$C(t,S)>P(t,S) \quad \textbf{(4.17)}$$

Cu alte cuvinte, dacă prețul de exercițiu, E este mai mare decât prețul spot fructificat, $S\cdot e^{r(T-t)}$, atunci valoarea opțiunii call este mai mare decât prețul opțiunii put.

b) Dacă $E>S\cdot e^{r(T-t)}$, atunci avem:

$$C(t,S)<P(t,S) \quad \textbf{(4.18)}$$

c) Dacă $E = S \cdot e^{r(T-t)}$, atunci avem:

$$C(t,S) = P(t,S) \tag{4.19}$$

Ținând seama că în cazul c) avem $E = S \cdot e^{r(T-t)}$, formula Black–Scholes se mai poate scrie:

$$C(t,S) = S[N(d_1) - N(d_2)] \tag{4.20}$$

iar pentru acest caz:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\ln\frac{S}{E \cdot e^{-r(T-t)}} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\sigma}{2}(T-t) \tag{4.21}$$

iar

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \tag{4.22}$$

Rezultă că:

$$N(d_2) = N(-d_1) = 1 - N(d_1)$$

iar formula (4.20) devine:

$$C(t,S) = S \cdot [2 \cdot N(d_1) - 1]$$

Cu alte cuvinte, în cazul în care:

$$E = S \cdot e^{r(T-t)}$$

avem:

$$C(t,S) = P(t,S) = S \cdot [2 \cdot N(d_1) - 1] \tag{4.23}$$

unde

$$d_1 = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}$$

<u>Exemplu:</u>

Dacă în cazul exemplului precedent considerăm că:

$S = 80;\ E = S \cdot e^{-0,1 \cdot 0,5} = 76,098;\ r = 0,1;\ \sigma = 27\%;\ T\text{-}t = 0,5$

aplicând formula (4.23), rezultă:

$C(t,S) = P(t,S) = 80 \cdot [2 \cdot 0,52691 - 1] = 0,05382 \cdot 80 = 4,3056$

3. *Model de evaluare a opțiunilor pentru cazul în care activul suport generează venit – Opțiuni pe acțiuni cu dividend; opțiuni pe indici bursieri; opțiuni pe valută*

Una dintre ipotezele făcute de Black–Scholes (1973) priveşte faptul că activul suport este exemplu-dividend. Cu alte cuvinte, pe perioada de viață a opțiunii, activul suport nu generează venit, respectiv nu necesită cheltuieli suplimentare de întreținere în cazul opțiunilor pe produse fizice (petrol, cereale, aur sau alte metale prețioase, etc).

La această cerință restrictivă s-a putut renunța relativ uşor, ținând seama că toate raționamentele privind evaluarea opțiunilor au la bază ipoteza de lipsă a oportunităților de arbitraj, respectiv <u>neutralitatea la risc</u>.

Vom face observația importantă că ecuația Black–Merton–Scholes (4.9) de dinamică a unui derivativ nu conține nici un element care să reflecte atitudinea față de risc a investitorului.

Elementele care intervin în ecuația (4.9), respectiv prețul spot al activului, S, volatilitatea sa σ şi rata dobânzii ,r, nu depind de atitudinea investitorului față de risc. Media rentabilității activului suport, respectiv $E(R) = \mu$ nu intervine în ecuația Black–Merton–Scholes, tocmai datorită faptului că această medie depinde de atitudinea investitorului în raport cu riscul.

În aceste condiții, se poate presupune, fără a restrânge generalitatea rezultatelor, că investitorii sunt <u>neutrali la risc</u>.

Pentru a vedea ce se întâmplă în cazul în care activul suport generează venit, vom reaminti câteva elemente privind <u>prețul forward</u>.

Se ştie că prețul forward pentru un contract al cărui activ suport nu generează venit pe perioada de viață a contractului este dat de formula:

$$F(t,T)=S_t\cdot e^{r(T-t)} \tag{4.24}$$

Au fost utilizate următoarele notații:

$F(t,T)$ - prețul forward;

S_t - prețul spot al activului suport;

$T-t$ - durata până la maturitate a contractului;

r - rata dobânzii

în cazul în care activul suport generează pe perioada de viață a contractului venit, formula (4.24) devine:

$$F(t,T)=(S_t-V_t)\cdot e^{r(T-t)} \tag{4.25}$$

Cu V_t s-a notat venitul actualizat pe care-l generează activul suport.

În cazul în care activul suport este o acțiune, iar rata dividendului continuă, analog cu rata dobânzii continue, este q, avem:

$$V_t=S_t-S_t\cdot e^{-q(T-t)} \tag{4.26}$$

În acest caz, prețul forward este dat de următoarea formulă care rezultă din (4.25):

$$F(t,T)=S_t\cdot e^{(r-q)(T-t)} \tag{4.27}$$

Într-un univers neutral la risc, formula (3.29) de dinamică a unui activ care nu generează venit poate fi rescrisă astfel:

$$dS=r\cdot S\cdot dt+\sigma\cdot S\cdot dz \tag{4.28}$$

În cazul în care activul generează venit, rata ritmului instantaneu (continuu) fiind q, formula (4.28) devine:

$$dS = (r-q)\cdot S\cdot dt + \sigma\cdot S\cdot dz \quad \textbf{(4.29)}$$

Ecuația (4.9) a lui Black–Merton–Scholes devine în acest caz:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + (r-q)\cdot S\cdot\frac{\partial D}{\partial S} + \sigma^2\cdot S^2\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = r\cdot D \quad \textbf{(4.30)}$$

Pe baza unor calcule asemănătoare, modelul de evaluare a unei opțiuni pentru cazul în care activul suport generează un venit având ritmul instantaneu egal cu q este:

- Pentru opțiuni CALL

$$C(t,S) = e^{-q(T-t)}S\cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)}E\cdot N(d_2) \quad \textbf{(4.31)}$$

- Pentru opțiuni PUT

$$P(t,S) = e^{-r(T-t)}E\cdot N(-d_2) - e^{-q(T-t)}S\cdot N(-d_1) \quad \textbf{(4.32)}$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad \textbf{(4.33)}$$

În formulele (4.31) şi (4.32) variabila q va avea următoarea semnificație:

- Pentru opțiuni având ca suport acțiuni care generează dividend q reprezintă rata anuală a dividendului continuu;
- Pentru opțiuni pe indici bursieri q reprezintă rata medie anuală a dividendului continuu; media ratei dividendului se calculează ținând seama de dividendele generate de acțiunile ce sunt incluse în indice precum şi de structura indicelui;
- Pentru opțiuni pe valută $q = r_f$, unde cu r_f s-a notat rata dobânzii din țara parteneră.

Exemple:

1. Vom calcula valoarea unei opţiuni call şi a unei opţiuni put având ca suport o acţiune pentru care rata dividendului continuu este $q = 2,5\%$. Se cunosc următoarele date:

$S = 45$; $E = 47$; $r = 0,09$; $\sigma = 27\%$; $T\text{-}t = 4$ luni

Aplicând formulele (4.31) – (4.33) se obţin următoarele rezultate:

$C = 2,3382$; $P = 3,3226$.

Vom face observaţia că, în cazul în care acţiune nu ar genera dividend, respectiv $q = 0$, atunci preţurile opţiunilor call, respectiv put, ar fi:

$C = 2,5197$; $P = 3,1306$.

2. Vom calcula valoarea unei opţiuni call având ca suport indicele bursier S&P 500. Vom presupune că:

$S = 1000$; $E = 980$; $\sigma = 20\%$; $r = 0.05$; $T - t = 6$ luni.

Vom presupune că rata medie a dividendului continuu pentru cele 500 de firme care intră în componenţa indicelui S&P 500 este $q = 2,1\%$. Aplicând formulele (4.31) şi (4.33) rezultă:

$C = 73,3470$

3. Vom considera un contract call de cumpărare de valută. Contractul este încheiat în SUA pentru a cumpăra lire sterline. Cursul spot este de $S = 1,4565$, iar preţul de exerciţiu este de $E = 1,4350$. Scadenţa contractului este peste trei luni ($T - t = 0,25$). Volatilitatea cursului de schimb USD/GBP este de $\sigma = 0,15$. Rata dobânzii în SUA este de $r = 5\%$, iar în Anglia este de $r_f = 6,8\%$. Aplicând formulele (4.31) şi (4.33) în care $q = r_f = 6,8\%$, vom obţine următoarea valoare pentru opţiunea call:

$C = 0,050407$

4. Modelul lui Black de evaluare a unei opțiuni pe un contract futures

În ultimii ani opțiunile pe contracte futures au luat o extindere deosebită, ele fiind tranzacționate pe multe piețe.

În anul 1976 F. Black a publicat un model de evaluare a opțiunilor pe contracte futures.

Pentru a deduce modelul lui Black, vom porni de la ecuația de dinamică a prețului futures:

$$\frac{dF}{F} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz \qquad \textbf{(4.34)}$$

unde *dz* este un proces Wiener fundamental, respectiv:

$$dz = \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \qquad \textbf{(4.35)}$$

Cu ε s-a notat, ca şi până acum, o variabilă aleatoare normal distribuită, având media zero şi varianța egală cu unu.

Vom considera un derivativ având ca suport contractul futures. Valoarea acestui derivativ este:

$$D = D(t, F) \qquad \textbf{(4.36)}$$

Aplicând lema lui Ito, se obține:

$$dD = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial F} \cdot \mu \cdot F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial F^2} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 \right) dt + \cdot \frac{\partial D}{\partial F} \cdot \sigma \cdot F \cdot dz \qquad \textbf{(4.37)}$$

În cazul discret, ecuațiile (4.34), (4.35) şi (4.37) devin:

$$\frac{\Delta F}{F} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta z \qquad \textbf{(4.34')}$$

$$\Delta z = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \qquad \textbf{(4.35')}$$

$$\Delta D = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial F} \cdot \mu \cdot F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial F^2} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 \right) \Delta t + \cdot \frac{\partial D}{\partial F} \cdot \sigma \cdot F \cdot \Delta z \qquad \textbf{(4.37')}$$

La fel ca şi în cazul deducerii ecuației de dinamică Black–Merton–Scholes (paragraful 1 al acestui capitol), vom forma un portofoliu având următoarea structură:

- 1 unitate de derivativ, poziție long;
- *h* unități de contracte futures.

Se ştie deja din paragraful 1 că pentru a elimina factorul stochastic, raportul de hedging trebuie ales astfel:

$$h = \frac{\partial D}{\partial F} \qquad \textbf{(4.38)}$$

Întrucât valoarea unui contract futures în momentul inițial este zero, valoarea portofoliului format, Π este:

$$\Pi = D - h \cdot F = D - \frac{\partial D}{\partial F} \cdot 0 = D$$

Variația valorii portofoliului pe intervalul de timp Δt va fi:

$$\Delta \Pi = \Delta D - \frac{\partial D}{\partial F} \cdot \Delta F \qquad \textbf{(4.39)}$$

Folosind ecuațiile (4.34') şi (4.37'), ecuația (4.39) devine:

$$\Delta \Pi = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial F^2} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 \right) \Delta t \qquad \textbf{(4.40)}$$

Ținând seama că portofoliul format este fără risc, variația $\Delta \Pi$ este egală şi cu:

$$\Delta \Pi = r \cdot \Pi \cdot \Delta t = r \cdot D \cdot \Delta t \qquad \textbf{(4.41)}$$

unde r este rata dobânzii.

Din relațiile (4.40) şi (4.41) rezultă:

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2=r\cdot D \tag{4.42}$$

Ecuația cu derivate parțiale (4.42) este analogă cu ecuația (4.9) a lui Black–Merton–Scholes. De asemenea, este analogă cu ecuația (4.30) dacă $q=r$.

Soluțiile ecuației ce derivate parțiale (4.42) pentru cazul în care $D=C$, respectiv $D=P$ sunt:

$$C=e^{-r(T-t)}\left[F\cdot N(d_1)-E\cdot N(d_2)\right] \tag{4.43}$$

$$P=e^{-r(T-t)}\left[E\cdot N(-d_2)-F\cdot N(-d_1)\right] \tag{4.44}$$

unde:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\frac{F}{E}+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \\ d_2 &= d_1-\sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \tag{4.45}$$

Formulele (4.43) – (4.45) reprezintă modelul lui Black pentru evaluarea unei opțiuni pe un contract futures.

Vom observa că formulele (4.43) – (4.45) sunt asemănătoare cu formulele (4.31) – (4.33) dacă înlocuim pe $q=r$ şi $S=F$.

Capitolul 5. Utilizarea opțiunilor în managementul riscului financiar

1. *Indicatorii de senzitivitate ai unei opțiuni*

Un număr foarte mare de instituții financiare, în special băncile, utilizează opțiunile în managementul riscului. Pentru înțelegerea modului în care opțiunile pot fi utilizate în managementul riscului este necesară cunoaşterea semnificației indicatorilor de senzitivitate a valorii unei opțiuni. Se ştie că, din punct de vedere matematic, senzitivitatea unei funcții este cuantificată de valoarea derivatei funcției respective.

Întrucât valoarea unui derivativ (opțiune) depinde de cinci parametri, respectiv de şase parametri în cazul în care activul suport generează venit pe perioada de viață a opțiuni, rezultă că vom avea un număr corespunzător de indicatori de senzitivitate. Conform tradiției acestea sunt notate cu litere greceşti.

Vom considera opțiunea:

$$D = D(S, E, \sigma, r, q, T - t) \tag{5.1}$$

Principalii indicatori de senzitivitate a unei opțiuni sunt:

- DELTA: $\Delta = \dfrac{\partial D}{\partial S}$; **(5.2)**
- NABLA: $\nabla = \dfrac{\partial D}{\partial E}$; **(5.3)**
- GAMMA: $\Gamma = \dfrac{\partial^2 D}{\partial S^2}$; **(5.4)**
- VEGA: $\vartheta = \dfrac{\partial D}{\partial \sigma}$; **(5.5)**
- THETA: $\Theta = \dfrac{\partial D}{\partial (T - t)}$; **(5.6)**
- RHO: $\rho = \dfrac{\partial D}{\partial r}$; **(5.7)**

- MIU: $\mu = \dfrac{\partial D}{\partial q}$; **(5.8)**

Cu D s-a notat generic o opțiune call, ($D=C$), respectiv o opțiune put ($D=P$)

Fiecare dintre cei şapte indicatori se senzitivitate cuantifică variația valorii opțiunii corespunzătoare unei variații mici a indicatorului respectiv. Dintre cei şapte indicatori, probabil cel mai important este indicatorul DELTA care cuantifică variația valorii unei opțiuni corespunzătoare unei variații mici a activului suport.

Din modul de deducere a ecuației Black–Merton–Scholes se ştie că indicatorul $\Delta = \dfrac{\partial D}{\partial S}$ reprezintă raportul de hedging care a făcut ca portofoliul Π utilizat în demonstrație să nu depindă de factori aleatori.

Teorema 1, care va fi prezentată în continuare, va permite deducerea rapidă a şase din cei şapte indicatori de senzitivitate. Pentru aceasta, va fi notat generic cu litera u oricare din cele şase variabile de care depinde funcția (5.1). teorema va fi formulată pentru opțiuni de tip call. Pentru opțiuni de tip put se poate obține similar o formulă analogă.

Teorema 1

Fie $C = C(S, E, \sigma, r, q, T-t)$ valoarea unei opțiuni call de tip european. Este valabilă următoarea formulă:

$$\frac{\partial C}{\partial u} = N(d_1)\cdot\frac{\partial\left(e^{-q(T-t)}\cdot S\right)}{\partial u} - N(d_2)\cdot\frac{\partial\left(e^{-r(T-t)}\cdot E\right)}{\partial u} + e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d}\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)}{\partial u} \quad \textbf{(5.9)}$$

Demonstrație:

Conform formulei de evaluare a unei opțiuni call, avem:

$$C = e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot N(d_1) - e^{-r(T-t)}\cdot E\cdot N(d_2) \quad \textbf{(5.10)}$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F}{E} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \qquad \textbf{(5.11)}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Derivând în raport cu u ecuația (5.10) se obține:

$$N(d_1)\cdot\frac{\partial\left(e^{-q(T-t)}\cdot S\right)}{\partial u} + e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial u} - N(d_2)\cdot\frac{\partial\left(e^{-r(T-t)}\cdot E\right)}{\partial u} - e^{-r(T-t)}\cdot E\cdot\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial u} \qquad \textbf{(5.12)}$$

Întrucât probabilitatea cumulată $N(d)$ este dată de formula:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad \textbf{(5.13)}$$

rezultă că:

$$\frac{\partial N(d)}{\partial d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}} \qquad \textbf{(5.14)}$$

Formula (5.14) rezultă din relația:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = F(d) - F(-\infty) \qquad \textbf{(5.15)}$$

unde cu $F(\cdot)$ s-a notat o primitivă a funcției $e^{-\frac{z^2}{2}}$. Relația (5.15) reprezintă formula Leibniz-Newton, cunoscută din şcoala medie.

Prin derivarea relației (5.15) rezultă formula (5.14).

Întrucât $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, din formula (5.14) rezultă:

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(d_1-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^{\,2}}{2}+d_1\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^{\,2}}{2}+\ln\frac{S}{E}+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^{\,2}}{2}+\ln\frac{S}{E}+(r-q)(T-t)}$$

Rezultă:

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}+\ln\frac{S\cdot e^{-q(T-t)}}{E\cdot e^{-r(T-t)}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\frac{S\cdot e^{-q(T-t)}}{E\cdot e^{-r(T-t)}}\tag{5.15}$$

Întrucât din formula (5.14) rezultă că.

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\tag{5.16}$$

rezultă că (5.15) se mai poate scrie astfel:

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}=\frac{S\cdot e^{-q(T-t)}}{E\cdot e^{-r(T-t)}}\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\tag{5.17}$$

Utilizând formula (5.17) în (5.12), rezultă:

$$\frac{\partial C}{\partial u}=N(d_1)\cdot\frac{\partial\left(e^{-q(T-t)}\cdot S\right)}{\partial u}-N(d_2)\cdot\frac{\partial\left(e^{-r(T-t)}\cdot E\right)}{\partial u}+e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial u}-e^{-r(T-t)}\cdot E\cdot\frac{S\cdot e^{-q(T-t)}}{E\cdot e^{-r(T-t)}}\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_2}{\partial u}$$

sau

$$\frac{\partial C}{\partial u}=N(d_1)\cdot\frac{\partial\left(e^{-q(T-t)}\cdot S\right)}{\partial u}-N(d_2)\cdot\frac{\partial\left(e^{-r(T-t)}\cdot E\right)}{\partial u}+e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\left(\frac{\partial d_1}{\partial u}-\frac{\partial d_2}{\partial u}\right)\tag{5.18}$$

Ținând seama că

$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$

rezultă:

$$\frac{\partial d_2}{\partial u} = \frac{\partial d_1}{\partial u} - \frac{\partial\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)}{\partial u}$$

sau

$$\frac{\partial d_1}{\partial u} - \frac{\partial d_2}{\partial u} = \frac{\partial\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)}{\partial u} \qquad \textbf{(5.19)}$$

Utilizând relația (5.19) în (5.18) rezultă formula (5.9) pe care ne-am propus să o demonstrăm. Cu aceasta teorema 1 este demonstrată.

Aplicații ale teoremei 1

1. $u = S$

Vom presupune că parametrul $u = S$. În formula (5.9) vom avea:

$$\frac{\partial\left(e^{-q(T-t)} \cdot S\right)}{\partial S} = e^{-q(T-t)}$$

$$\frac{\partial\left(e^{-r(T-t)} \cdot E\right)}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)}{\partial S} = 0$$

Ținând seama de cele trei relații de mai sus din formula (5.9) rezultă:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-q(T-t)} \cdot N\left(d_1\right) \qquad \textbf{(5.20)}$$

Formula (5.20) dă valoarea indicatorului de senzitivitate Δ care arată cu câte unități se modifică valoarea opțiunii call dacă cursul spot al activului suport se modifică cu o unitate.

În cazul în care acțiunea suport este exemplu-dividend, respectiv $q = 0$, formula (5.20) devine:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \tag{5.21}$$

2. $u = E$

În cazul în care variabila *u* este prețul de exercițiu *E*, din formula (5.9) rezultă că:

$$\nabla = \frac{\partial C}{\partial E} = -e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \tag{5.22}$$

deoarece

$$\frac{\partial\left(e^{-r(T-t)} \cdot E\right)}{\partial E} = e^{-r(T-t)}$$

toate celelalte derivate care intervin în formula (5.9) fiind zero.

Indicatorul NABLA dat de formula (5.22) arată cu câte unități se modifică valoarea opțiunii call în cazul în care prețul de exercițiu se modifică cu o unitate.

3. $u = \sigma$

În cazul în care variabila *u* este volatilitatea σ, din formula (5.9) rezultă:

$$\vartheta = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = e^{-q(T-t)} \cdot S \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{T-t} \tag{5.23}$$

deoarece

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \text{, iar}$$

$$\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)}{\partial\sigma} = \sqrt{T-t}$$

Celelalte derivate ce intervin în formula (5.9) sunt zero.

Formula (5.23) cuantifică senzitivitatea valorii opțiunii call în raport cu volatilitatea σ.

4. $u = T - t$

În cazul în care $u = T - t$, T fiind scadența, iar t timpul curent, rezultă:

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial(T-t)} = -q \cdot S \cdot e^{-q(T-t)} \cdot N(d_1) + r \cdot E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) + e^{-q(T-t)} \cdot S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2\sqrt{T-t}} \tag{5.24}$$

Formula (5.24) măsoară senzitivitatea opțiunii call în raport cu perioada de timp *(T-t)* până la scadență.

În cazul în care valoarea lui T este fixată, iar timpul curent este variabil, vom calcula un al doilea indicator de senzitivitate:

$$\Theta_1 = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial(T-t)} \cdot \frac{\partial(T-t)}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial(T-t)} = -\Theta$$

Rezultă că

$$\Theta_1 = \frac{\partial C}{\partial t} = q \cdot S \cdot e^{-q(T-t)} \cdot N(d_1) - r \cdot E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) - e^{-q(T-t)} \cdot S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2\sqrt{T-t}} \tag{5.25}$$

5. $u = r$

În cazul în care variabila u este rata dobânzii, din formula (5.9) rezultă:

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}(T-t) \cdot N(d_2) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot E \tag{5.30}$$

Formula (5.30) cuantifică senzitivitatea valorii opțiunii call în raport cu rata dobânzii.

6. $u = q$

În cazul în care variabila u este valoarea q, respectiv rata dividendului continuu din formula (5.9) rezultă:

$$\mu = \frac{\partial C}{\partial q} = -(T-t) \cdot N(d_1) \cdot e^{-q(T-t)} \cdot S \tag{5.31}$$

Formula (5.31) cuantifică variația valorii unei opțiuni call în raport cu rata continuă a dividendului generat de către acțiunea suport.

Pentru calculul indicatorului gamma vom utiliza formula (5.20):

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-q(T-t)} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} \tag{5.32}$$

Ținând seama că:

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial \left(\dfrac{\ln \dfrac{F}{E} + \left(r - q + \dfrac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)}{\partial S} = \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t}} \tag{5.33}$$

iar

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

din (5.32) rezultă

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = e^{-q(T-t)} \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \tag{5.34}$$

Indicatorul GAMMA este utilizat în cazul în care se doreşte studiul variației valorii unei opțiuni corespunzând unei variații a prețului activului suport, variație care nu poate fi considerată a fi foarte mică.

În acest caz, conform formulei de dezvoltare în serie Taylor, avem:

$$C(S_2)-C(S_1)=\frac{\partial C(S_1)}{\partial S}(S_2-S_1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C(S_1)}{\partial S^2}(S_2-S_1)^2$$

respectiv:

$$C(S_2)-C(S_1)=\Delta\cdot(S_2-S_1)+\frac{1}{2}\Gamma\cdot(S_2-S_1)^2 \qquad \textbf{(5.35)}$$

În formula (5.35) s-a considerat că aproximația diferenței $C(S_2)-C(S_1)$ cu termeni până la gradul doi este satisfăcătoare.

2. *Indicatorii de senzitivitate pentru opțiuni put*

Pentru opțiunile de tip put, indicatorii de senzitivitate vor fi deduşi din paritatea put-call.

Vom considera formula de evaluare a unei opțiuni europene de tip put, respectiv:

$$P(t,S)=e^{-r(T-t)}\cdot E\cdot N(-d_2)-e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot N(-d_1) \qquad \textbf{(5.36)}$$

Ținând seama de faptul că

$$N(-d)=1-N(d) \qquad \textbf{(5.37)}$$

din relația (5.36) rezultă:

$$P(t,S)=e^{-r(T-t)}\cdot E\cdot(1-N(d_2))-e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot(1-N(d_1))$$

respectiv:

$$P(t,S)=e^{-q(T-t)}\cdot S\cdot N(d_1)-e^{-r(T-t)}\cdot E\cdot N(d_2)-\left[e^{-q(T-t)}\cdot S-e^{-r(T-t)}\cdot E\right] \quad \textbf{(5.38)}$$

Ținând seama de formulele de evaluare a unei opțiuni de tip call, relația (5.38) se mai poate scrie astfel:

$$P(t,S)=C(t,S)-\left[e^{-q(T-t)}\cdot S-e^{-r(T-t)}\cdot E\right] \quad \textbf{(5.39)}$$

Relația (5.39) reprezintă relația de paritate put-call pentru opțiuni de tip european având ca suport un activ care generează venit pe perioada de viață a opțiunii.

Reamintim că în cazul în care activul suport este o acțiune, q reprezintă rata continuă a dividendului.

În cazul în care avem o opțiune pe valută, $q=r_f$, r_f fiind rata dobânzii în țara parteneră.

În acest caz, relația (5.39) se mai poate scrie:

$$P(t,S)=C(t,S)-\left[e^{-r_f(T-t)}\cdot S-e^{-r(T-t)}\cdot E\right] \quad \textbf{(5.40)}$$

Teorema 2, pe care o prezentăm în continuare, cuantifică relația dintre indicatorii unei opțiuni put şi cei ai unei opțiuni call.

Teorema 2

Fie $P(t,S)$ valoarea unei opțiuni put şi $C(t,S)$ valoarea unei opțiuni call având acelaşi activ suport şi aceiaşi scadență. Are loc relația:

$$\frac{\partial P(t,S)}{\partial u}=\frac{\partial C(t,S)}{\partial u}-\frac{\partial\left(e^{-q(T-t)}\cdot S-e^{-r(T-t)}\cdot E\right)}{\partial u} \quad \textbf{(5.41)}$$

unde u reprezintă o variabilă oarecare de care depinde atât valoarea opțiunii put, cât şi valoarea opțiunii call.

Demonstrație:

Demonstrația rezultă imediat prin derivarea relației (5.39) de paritate put-call.

Aplicații

Pentru exemplificare, vom deduce indicatorii DELTA şi NABLA pentru o opțiune de tip put, reliefând în acelaşi timp relațiile ce există între indicatorii unei opțiuni de tip put şi cei ai unei opțiuni de tip call.

1) Particularizând în relația (5.41) pe $u = S$, se obține:

$$\frac{\partial P(t,S)}{\partial S} = \frac{\partial C(t,S)}{\partial S} - e^{-q(T-t)}$$

respectiv:

$$\Delta_P = \Delta_C - e^{-q(T-t)} \tag{5.42}$$

Cu Δ_P, respectiv Δ_C s-a notat indicatorul DELTA pentru o opțiune put, respectiv call.

Relația (5.42) pune în evidență relația ce există între indicatorii DELTA pentru cele două tipuri de opțiuni.

Se ştie deja că, conform ecuația (5.20):

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-q(T-t)} \cdot N(d_1)$$

Din relația (5.42) se obține:

$$\Delta_P = e^{-q(T-t)} \cdot N(d_1) - e^{-q(T-t)}$$

sau

$$\Delta_P = -e^{-q(T-t)} \cdot [1 - N(d_1)]$$

respectiv

$$\Delta_P = -e^{-q(T-t)} \cdot N(-d_1) \tag{5.43}$$

Relația (5.43) pune în evidență faptul că indicatorul DELTA pentru o opțiune put este <u>întotdeauna negativ</u>.

2) Particularizând în relația (5.41) pe $u = E$, obținem:

$$\frac{\partial P(t,S)}{\partial E} = \frac{\partial C(t,S)}{\partial E} + e^{-r(T-t)}$$

respectiv:

$$\nabla_P = \nabla_C + e^{-r(T-t)} \tag{5.44}$$

Ținând seama că:

$$\nabla_C = -e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

din relația (5.44) rezultă:

$$\nabla_P = e^{-r(T-t)} N(-d_2) \tag{5.45}$$

Din relația (5.45) se observă că indicatorul NABLA pentru o opțiune put este pozitiv, ceea ce corespunde intuiției financiare, ținând seama de semnificația acestui indicator.

3) Din formula (5.41) se observă ușor că indicatorii VEGA sunt egali pentru cele două tipuri de opțiuni.

Într-adevăr, particularizând $u = \sigma$, din relația (5.41) rezultă:

$$\frac{\partial P(t,S)}{\partial \sigma} = \frac{\partial C(t,S)}{\partial \sigma} \tag{5.46}$$

respectiv

$$\vartheta_P = \vartheta_C \quad \textbf{(5.47)}$$

4) Din relația (5.42) se observă că:

$$\frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} \quad \textbf{(5.48)}$$

respectiv

$$\Gamma_P = \Gamma_C \quad \textbf{(5.49)}$$

Aşadar, indicatorii gamma pentru opțiunile de tip put şi opțiunile de tip call sunt egali.

5) Pentru cazul în care $u = T - t$, respectiv $u = r$, din relația fundamentală (5.41) rezultă:

$$\frac{\partial P(t,S)}{\partial (T-t)} = \frac{\partial C(t,S)}{\partial (T-t)} + q \cdot e^{-q(T-t)} \cdot S - r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot E$$

respectiv

$$\Theta_P = \Theta_C + \left[q \cdot e^{-q(T-t)} \cdot S - r \cdot e^{-r(T-t)} \cdot E\right] \quad \textbf{(5.50)}$$

Dacă $u = r$, din relația (5.41) se obține:

$$\frac{\partial P(t,S)}{\partial r} = \frac{\partial C(t,S)}{\partial r} - (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot E \quad \textbf{(5.51)}$$

respectiv:

$$\rho_P = \rho_C - (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot E \quad \textbf{(5.52)}$$

Din relația (5.52) se observă că dacă opțiunile se apropie de scadență, respectiv $(T-t) \to 0$, atunci indicatorii RHO pentru cele două tipuri de opțiuni tind să devină egali, respectiv:

$$\lim_{T-t \to 0} \rho_P = \lim_{T-t \to 0} \rho_C$$

<u>Exemplu:</u>

Se va considera o opțiune call şi o opțiune put având ca suport o acțiune care generează dividend. Sunt cunoscute următoarele date:

$S = 120;\ E = 123;\ r = 0{,}1;\ \sigma = 35\%;\ T = 9$ luni; $q = 3\%$

Aplicând formulele cunoscute şi efectuând calculele rezultă:

- Prima call: $C = 15{,}6069$
- Prima put: $P = 12{,}3893$

Indicatorii de senzitivitate:

$\Delta_C = 0{,}5828$;	$\Delta_P = -0{,}3949$
$\nabla_C = -0{,}4417$;	$\nabla_P = 0{,}4859$
$\Gamma_C = 0{,}01041$;	$\Gamma_P = 0{,}01041$
$\vartheta_C = 39{,}3547$;	$\vartheta_P = 39{,}3547$
$\rho_C = 40{,}7511$;	$\rho_P = -44{,}8331$
$\Theta_{1C} = -12{,}51879$;	$\Theta_{1P} = -4{,}6266$
$\mu_C = -52{,}45$;	$\mu_P = 35{,}541$

Indicatorul de senzitivitate în raport cu timpul a fost calculat după formula (5.25) respectiv derivatele: $\dfrac{\partial C}{\partial t}$; $\dfrac{\partial P}{\partial t}$.

Interpretarea rezultatelor:

Din valorile indicatorului DELTA, se observă că dacă cursul spot va creşte cu o unitate, prima call va creşte cu 0,5828, în timp ce prima put se va reduce cu 0,3949.

În cazul în care preţul de exerciţiu va creşte cu o unitate, din valorile indicatorului NABLA rezultă că prima call se va reduce cu 0,4417, în timp ce prima put va creşte cu 0,4859.

Indicatorul GAMMA arată modul în care se va modifica indicatorul de hedging DELTA dacă cursul spot va creşte cu o unitate.

În acelaşi timp, indicatorul gamma permite să estimăm valoarea primei pentru cazul în care modificarea preţului spot nu este foarte mică. Într-adevăr, din formula (5.34) rezultă:

$$C(S_2) = C(S_1) + \Delta(S_2 - S_1) + \frac{1}{2}\Gamma(S_2 - S_1)^2$$

Vom presupune că preţul spot creşte de la 120 la 123. Aplicând formula de mai sus, rezultă:

$$C(123) = C(120) + 0{,}5828 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}01041 \cdot 3^2$$

Înlocuind $C(120) = 15{,}6069$, rezultă $C(123) = 17{,}4021$.

Valoarea de mai sus reprezintă o aproximaţie acceptabilă pentru prima call în cazul în care preţul spot devine $S = 123$. Aplicând direct formula Black–Scholes, se obţine că valoarea exactă este de fapt $C = 17{,}4016$, care este foarte apropiată de cea obţinută mai sus prin aplicarea formulei (5.34).

În ceea ce priveşte indicatorul VEGA, acesta arată faptul că dacă volatilitatea activului suport va creşte cu un punct procentual, respectiv va creşte de la 35% la 36%, atunci atât prima call, cât şi prima put vor creşte cu:

$$0{,}01 \cdot \vartheta = 0{,}01 \cdot 39{,}3547 = 0{,}393547$$

În mod asemănător indicatorii RHO arată modificarea primei în cazul în care rata dobânzii se modifică cu un punct procentual. În cazul în care rata dobânzii se modifică de la 10% la 11%, prima se va modifica astfel:

- Prima call: $0{,}01 \cdot \rho_C = 0{,}407511$
- Prima put: $0{,}01 \cdot \rho_P = -0{,}448331$

În ceea ce priveşte indicatorul THETA, acestea arată modificarea valorii primei în raport cu factorul timp. Astfel, în cazul exemplului considerat, după o zi valoarea primei se modifică astfel:

- Prima call: $\frac{1}{252} \cdot (-12{,}51879) = -0{,}04967$
- Prima put: $\frac{1}{252} \cdot (-4{,}6266) = -0{,}018359$

Mai sus, anul financiar a fost considerat a avea 252 zile.

Din cele de mai sus rezultă că în fiecare zi prima call pierde o valoare egală cu 0,04967, în timp ce prima put pierde 0,018359.

3. *Indicatorii de senzitivitate ai unui portofoliu*

Indicatorii prezentaţi în paragraful precedent joacă un rol fundamental în gestiunea unui portofoliu de active financiare.

Calculul indicatorilor pentru un portofoliu se bazează pe observaţia fundamentală că aceştia sunt funcţii liniare în raport cu parametrii de structură ai portofoliului. De exemplu, dacă avem un portofoliu Π format din n tipuri de opţiuni având în compoziţia sa N_k opţiuni de tipul k, $k = 1,2\ldots\ldots,n$, atunci indicatorii portofoliului vor fi:

$$\begin{aligned}
\Delta_\Pi &= N_1 \cdot \Delta_1 + N_2 \cdot \Delta_2 + \ldots\ldots + N_n \cdot \Delta_n \\
\Gamma_\Pi &= N_1 \cdot \Gamma_1 + N_2 \cdot \Gamma_2 + \ldots\ldots + N_n \cdot \Gamma_n \\
\vartheta_\Pi &= N_1 \cdot \vartheta_1 + N_2 \cdot \vartheta_2 + \ldots\ldots + N_n \cdot \vartheta_n
\end{aligned} \qquad \textbf{(5.53)}$$

ş.a.m.d.

Pentru exemplificare vom considera un portofoliu format din trei tipuri de opțiuni, având același activ suport. Caracteristicile activului suport sunt următoarele:

$S = 85$; $\sigma = 33\%$; $q = 1{,}5\%$;

Vom presupune că $r = 10\%$.

Vom considera că structura portofoliului este următoarea:

- 1000 opțiuni call – poziție long; $E = 85$; $T = 6$ luni
- 800 opțiuni call – poziție short; $E = 87$; $T = 5$ luni
- 1200 opțiuni put – poziție long; $E = 87$; $T = 6$ luni

Calculând pe baza formulei Black–Scholes prețurile celor trei tipuri de opțiuni se obține:

$C_1 = 9{,}5343$; $C_2 = 7{,}6427$; $P_3 = 6{,}9835$.

Pentru cele trei tipuri de opțiuni avem următorii indicatori Δ, Γ și ϑ:

$\Delta_1 = 0{,}6128$	$\Delta_2 = 0{,}5614$	$\Delta_3 = -0{,}4179$
$\Gamma_1 = 0{,}01909$	$\Gamma_2 = 0{,}021607$	$\Gamma_3 = 0{,}01957$
$\vartheta_1 = 22{,}7598$	$\vartheta_2 = 21{,}4677$	$\vartheta_3 = 23{,}3316$

Valoarea portofoliului (ceea ce a plătit investitorul) este:

$$\Pi = 1000 \cdot 9{,}5343 - 800 \cdot 7{,}6427 + 1200 \cdot 6{,}9835 = 11800{,}34$$

Indicatorii portofoliului vor fi:

$$\Delta_\Pi = 1000 \cdot 0{,}6128 - 800 \cdot 0{,}5614 + 1200 \cdot (-0{,}4179) = -337{,}800$$

$$\Gamma_\Pi = 1000 \cdot 0{,}01909 - 800 \cdot 0{,}021607 + 1200 \cdot 0{,}01957 = 25{,}2884$$

$$\vartheta_\Pi = 1000 \cdot 22{,}7598 - 800 \cdot 21{,}4677 + 1200 \cdot 23{,}3316 = 33583{,}56$$

Valoarea indicatorului DELTA arată că dacă prețul activului suport va crește cu o unitate, valoarea portofoliului se va reduce cu 337,800 unități.

În cazul în care volatilitatea activului suport va creşte de la 33% la 34%, indicatorul VEGA arată că valoarea portofoliului va creşte cu 335,8536 unități.

Vom presupune acum că investitorul anticipează că prețul activului suport se va modifica, dar nu se ştie în ce direcție. În acest caz el doreşte ca portofoliul să fie Δ-neutral.

Pentru aceasta este suficient să introducă în portofoliu 337,800 acțiuni – poziție long. Într-adevăr, se ştie că indicatorul DELTA pentru activul suport este egal cu 1, respectiv:

$$\Delta = \frac{\partial S}{\partial S} = 1 \tag{5.54}$$

Dacă vom presupune că investitorul nu ştie nici direcția în care se va modifica volatilitatea, atunci el va dori ca portofoliul să fie DELTA-VEGA – neutral.

Pentru ca portofoliul să devină VEGA neutral ($\vartheta_\Pi = 0$), atunci el (investitorul) va trebui să ia poziție short pe unul dintre tipurile de opțiuni. Vom presupune că ia, în continuare poziție short pe opțiunile de tipul doi ($33583{,}56/21{,}4677 = 1564{,}37$).

În acest ultim caz, portofoliul nu mai este Δ-neutral, el având acum $\Delta_\Pi = -1564{,}37 \times 0{,}5614 = -878{,}24$.

Pentru ca portofoliul să redevină Δ-neutral, el va trebui să ia poziție long pe încă 878,24 de acțiuni.

Între indicatorii DELTA, GAMMA şi THETA ai unui portofoliu de opțiuni este o legătură foarte strânsă, rezultată din ecuația Black–Merton–Scholes.

Într-adevăr, conform ecuației (4.9) avem:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial D}{\partial S} + \sigma^2 \cdot S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = r \cdot D$$

unde $D = C$ sau $D = P$.

Trecând la un portofoliu de opțiuni, avem:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial S} + \sigma^2 \cdot S^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r \cdot \Pi \tag{5.55}$$

respectiv:

$$\Theta_{\Pi} + r \cdot S \cdot \Delta_{\Pi} + \sigma^2 \cdot S^2 \frac{1}{2} \Gamma_{\Pi} = r \cdot \Pi \qquad \textbf{(5.56)}$$

Dacă portofoliul este DELTA-neutral, din (5.56) rezultă:

$$\Theta_{\Pi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma_{\Pi} = r \cdot \Pi \qquad \textbf{(5.57)}$$

Din relația (5.57) rezultă că dacă Θ_{Π} este pozitiv şi are o valoare mare, atunci, în general Γ_{Π} va fi negativ şi avea, de asemenea, o valoare mare.

În sfârşit, dacă portofoliul este DELTA-GAMMA neutral, atunci avem:

$$\Theta_{\Pi} = r \cdot \Pi \qquad \textbf{(5.57)}$$

În sfârşit, vom mai face observația că, uneori, în loc de a lucra cu opțiuni propriu-zise se poate lucra cu „clone” ale acestora, respectiv cu <u>opțiuni sintetice</u>.

Într-adevăr, din relația de paritate put-call, pentru cazul în care $q = 0$, rezultă:

$$C = P + S - E \cdot e^{-r(T-t)}$$

Relația de mai sus pune în evidență modul în care putem avea o opțiune call sintetică. Luând poziție long pe o opțiune put şi pe o unitate de activ suport şi poziția short pe o obligațiune având valoarea $E \cdot e^{-r(T-t)}$ echivalează ce a lua poziție long pe o opțiune call.

4. Hedging dinamic

În general, dacă un portofoliu conținând opțiuni este neutral, el își pierde această calitate odată cu trecerea timpului.

Pentru exemplificare vom considera cazul unei opțiuni call, poziție short. Se cunosc următoarele elemente:

$$S = 90;\;\; E = 90;\;\; \sigma = 35\%;\;\; T = 6\ luni;\;\; r = 10\%;\;\; q = 0$$

Aplicând formula Black–Scholes rezultă că prima încasată este $C = 11,01682$.

Întrucât volatilitatea acțiunii suport este mare ($\sigma = 35\%$), la scadență prețul activului suport poate fi foarte mare. De exemplu, dacă după 6 luni $S = 120$, atunci investitorul va trebui să plătească diferența $S - E = 30$, el încasând o primă de numai 11,01682. Rezultă că va avea o pierdere de cca 19 u.m.

Pentru a nu avea o astfel de pierdere, investitorul va lua poziție long pe un număr de Δ acțiuni, formându-și un portofoliu DELTA neutral.

În cazul considerat avem: $\Delta = 0,62770$.

Rezultă că portofoliul:

$\Pi = -C + 0,62770 \times S$

este $\Delta\text{-neutral}$, respectiv valoarea lui nu este influențată de variații mici ale lui Δ.

Într-adevăr,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = -\Delta_C + 0,62770 = -0,62770 + 0,62770 = 0,$$

ceea ce arată că valoarea portofoliului nu se modifică dacă *S* variază puțin.

În cazul în care anticipăm variații mai mari ale prețului *S*, se poate apela la o operație de DELTA-GAMMA hedging.

Dar, și în această situație, operația de hedging este valabilă pe termen scurt, întrucât, în timp, odată cu modificarea prețului *S* se modifică toți indicatorii, inclusiv

Δ. De aceea, trebuie apelat la operația de hedging dinamic, respectiv reajustarea portofoliului la intervale cât mai dese de timp.

Pentru înțelegerea mecanismului de hedging dinamic vom face ipoteza simplificatoare că reajustarea portofoliului se face lunar.

Vom presupune că operatorul emite un număr de 10.000 opțiuni call de tipul de mai sus încasând o primă egală cu:

$$10000 \times 11,0168 = 110168 .$$

Pentru a avea un portofoliu DELTA neutral va cumpăra un număr de:

$10000 \times 0,62770 = 6227,7$ acțiuni

pentru care va plăti suma de:

$6227,7 \times 90 = 564993$

Aceşti bani vor fi împrumutați, iar dobânda pe o lună va fi:

$$D_0 = 564993 \times \frac{0,1}{12} = 4708,27$$

Fiind vorba de un termen scurt, mai sus dobânda a fost calculată după formula dobânzii simple.

La începutul <u>lunii a doua</u>, vom presupune că $S = 94$. În acest caz $T - t = 5$ luni $= 0,4166$, iar indicatorul DELTA devine $\Delta = 0,68788$. Cu alte cuvinte indicatorul DELTA creşte cu:

$0,68788 - 0,62277 = 0,06511$

Rezultă că investitorul va trebui să mai cumpere la prețul de $S = 94$ un număr de 651,1 acțiuni pentru care va plăti suma de 61203.

Pentru luna a doua investitorul va avea un credit total egal cu 626196,4. dobânda pe luna a II-a va fi:

$$D_1 = 626196,4 \times \frac{0,1}{12} = 5218,3$$

La începutul lunii a treia, prețul rămâne în continuare $S = 94$. Întrucât $T - t = 4$ luni=0,3333, din calcul rezultă că $\Delta = 0,68480$, respectiv scade cu 0,00308. Rezultă că investitorul va vinde la prețul de $S = 94$ un număr de 30,8 acțiuni, iar pentru luna a treia va avea de plătit o dobândă egală cu:

$$623301,2 \times \frac{0,1}{12} = 5194,17$$

La începutul lunii a patra, vom presupune că $S = 99$. Întrucât $T - t = 3$ luni=0,25, din calcul rezultă $\Delta = 0,78082$.

Pentru a-şi ajusta portofoliul investitorul va trebui să mai cumpere, la prețul de $S = 99$, un număr de:

$$10000 \times (0,78082 - 0,68480) = 960,2 \text{ acțiuni}$$

pentru care va plăti suma de 95059,8. .

Dobânda pe luna a patra va fi:

$$718361 \times \frac{0,1}{12} = 5986,34$$

La începutul lunii a cincea, vom presupune că prețul urcă la $S = 112$.

Pentru luna a cincea $\Delta = 0,95716$, şi deci pentru echilibrarea portofoliului investitorul va trebui să cumpere un număr de:

$$10000 \times (0,95716 - 0,78082) = 1763,4 \text{ acțiuni}$$

pentru care va plăti suma de:

$$112 \times 1763,4 = 197500,8$$

În această lună, investitorul va avea un credit de 915861,8 pentru care va plăti o dobândă de 7632,18.

La începutul lunii a şasea vom presupune că $S = 125$. Avem $T - t = 0,08333$, iar $\Delta = 0,99964$.

Investitorul va trebui să cumpere un număr de:

$$10000 \times (0,99964 - 0,95716) = 424,8 \text{ acțiuni}$$

pentru care va plăti suma de 53100.

În acest moment investitorul are în stoc 9996,4 acțiuni şi un credit egal cu 968961,8 u.m. Dobânda pentru luna a şasea va fi egală cu 8074,68.

La scadență, investitorul va mai cumpăra 3,6 acțiuni la prețul de 125 u.m. bucata pe care le adaugă la stocul său deja existent de 9996,4. Acestea vor fi livrate operatorului care a cumpărat cele 10000 opțiuni call în urmă cu 6 luni.

Dobânda totală plătită de investitorul care a avut poziția short pe cele 10000 opțiuni call este egală cu 36813,94.

Câştigul său net este egal cu:

Prima încasată	110168
Dobânzi primite	5508,4
Dobânzi plătite	-36813,94
Diferența de curs la 3,6 acțiuni	-119,0
Câştig net	78743,46

În ceea ce priveşte investitorul care a cumpărat cele 10000 de opțiuni, câştigul său net este egal cu:

Diferența de curs	$10000 \times 35 = 350000$
Prima plătită	-110168
Pierdere de dobândă	-5508,4
Câştig net	234323,4

Din schema simplificată prezentată mai sus, rezultă că prin operațiile cu opțiuni, atât operatorul care a avut poziția short, cât şi cel care a avut poziția long au câştigat.

În cazul în care operatorul care a avut poziția short nu ar fi aplicat o schemă dinamică de hedging, el ar fi avut o pierdere egală ci:

$10000 \times (125-90) - 110168 - 5508,4 = 234323,6$ care reprezintă suma pe care o câştigă operatorul cu poziția long.

5. *Operații de hedging utilizând contracte futures, opțiuni pe indici bursieri şi opțiuni protective*

Contractele futures sunt utilizate pe scară largă în operațiile de hedging al unui portofoliu de active şi de derivate financiare. Întrucât contractele futures nu asigură un hedging perfect, este necesar a calcula riscul de bază, respectiv Basis-ul.

Prin definiție, avem:

BASIS = prețul spot al activului ce urmează a fi acoperit (hedged) – prețul futures al contractului utilizat.

În vederea reducerii riscului de bază (BASIS RISK) se impune optimizarea raportului de hedging. Acesta se poate face utilizând elementele cunoscute din teoria portofoliului.

Vom utiliza următoarele notații:

ΔS – variația prețului spot pe perioada pe care se face operația de hedging;

ΔF – variația prețului futures pe aceeaşi perioadă.;

σ_S, σ_F – volatilitatea lui ΔS, respectiv ΔF;

ρ – coeficientul de corelație dintre ΔS şi ΔF

În cazul în care efectuăm operația de hedging luând poziția long pe activ şi poziția short pe un contract futures, vom considera portofoliul de hedging de forma:

$$\Pi = \Delta S - h \cdot \Delta F \tag{5.58}$$

Cu h s-a notat raportul de hedging ce urmează a fi determinat.

Varianța portofoliului Π este:

$$\sigma_\Pi^2 = \sigma_S^2 + h^2 \cdot \sigma_F^2 - 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_F \tag{5.59}$$

Vom defini raportul optim de hedging ca fiind acela care minimizează varianța portofoliului Π. Din (5.59), prin derivare obținem:

$$\frac{\partial \sigma_{\Pi}^2}{\partial h} = 2 \cdot h \cdot \sigma_F^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_F \tag{5.60}$$

Rezultă că raportul optim de hedging este:

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{5.61}$$

Din formula (5.61) rezultă că cu cât σ_S sau ρ este mai mare, cu atât raportul optim de hedging h^* este mai mare. Raportul optim de hedging scade odată cu creşterea volatilităţii σ_F a variaţiei preţului futures.

Exemplu:

Un operator doreşte să cumpere peste trei luni o cantitate de 1000000 unităţi de valută. Pentru a se proteja împotriva fluctuaţiei cursului valutar, el hotărăşte să cumpere contracte futures. Valoarea unui contract este de 32000 u.m.

Volatilitatea cursului spot pe trei luni este de $\sigma_S = 2,5\%$, iar volatilitatea cursului futures pe trei luni este de 3,4%. Coeficientul de corelaţie dintre cele două cursuri este de $\rho = 0,85$.

Conform formulei (5.61), raportul de hedging este de :

$$h^* = 0,85 \times \frac{0,025}{0,034} = 0,625.$$

Rezultă că operatorul va trebui să cumpere un număr de:

$0,625 \times \frac{1000000}{32000} = 19,53$ contracte futures.

Evident că operatorul va cumpăra 20 de contracte futures, ceea ce va da o anumită aproximaţie operaţiei de hedging.

În ceea ce priveşte contractele futures pe indici bursieri, acestea pot fi utilizate cu succes în operaţiile de modificare a volatilităţii unui portofoliu de acţiuni.

De exemplu, dacă un investitor a investit într-un portofoliu de acțiuni a cărui volatilitate este $\beta = 1{,}8$, ele poate considera că acest portofoliu este prea riscant, şi deci îi poate produce pierderi mari. De aceia, el poate hotărî să reducă volatilitatea, de exemplu, la $\beta = 1{,}1$.

Aceasta poate di realizat luând poziție short într-un număr de contracte futures pe indici bursieri, de exemplu pe S&P–500.

Numărul de contracte futures se calculează pe baza formulei:

$$n = \left(\beta - \beta^*\right)\frac{\Pi}{V} \tag{5.62}$$

unde:

n – numărul de contracte;

β^* – ținta fixată pentru β;

Π – valoarea portofoliului;

V – valoarea unui contract futures.

Exemplu:

Vom considera $\beta = 1{,}8$; $\beta^* = 1{,}1$ şi $\Pi = 10.000.000$.

Vom considera că valoarea lui S&P-500 este egală cu 1000. în acest caz avem:

$V = 100 \times 250 = 250000$

unde valoarea de 250 USD reprezintă valoarea standard pentru un punct al indicelui bursier S&P-500 utilizat în SUA.

Rezultă că investitorul va lua poziție short pe un număr de:

$n = \left(1{,}8 - 1{,}1\right) \times \dfrac{10000000}{250000} = 28$ contracte futures.

Evident că investitorul poate utiliza opțiuni pe indicii bursieri în locul contractelor futures pentru a efectua operații de hedging, respectiv pentru a reduce volatilitatea portofoliului de acțiuni. În acest ultim caz operația de hedging va fi mai eficientă, dar ea va implica un anumit cost.

În ceea ce priveşte opțiunile put protective, acestea sunt acele opțiuni care sunt utilizate pentru protejarea portofoliului de acțiuni împotriva reducerii cursului acțiunilor.

Evident că, orice investiție într-o acțiune poate fi protejată luând poziție long pe o opțiune put, însă raportul de hedging $1 \div 1$ este, în general, prea costisitor.

Pentru exemplificarea modului de utilizare a opțiunilor put protective vom considera următoarea situație. Un investitor doreşte să investească suma W într-un portofoliu diversificat de acțiuni, în obligațiuni şi în opțiuni pe indici bursieri. Orizontul de timp pentru care investitorul ia decizia de investire este *T*.

Investitorul fixează un nivel minim A_T pentru suma pe care doreşte să o posede în momentul *T*.

Evident că,

$$A_T > W \tag{5.63}$$

Întrucât vom presupune că nu sunt posibile operații de arbitraj, plafonul sigur A_T va îndeplini condiția:

$$A_T \leq e^{r \cdot T} \times W \tag{5.64}$$

unde *r* este rata dobânzii.

Aceasta deoarece investitorul nu-şi poate asigura un venit sigur, fără a-şi asuma vreun risc, mai mare decât $e^{r \cdot T} \times W$.

Vom utiliza următoarele notații:

Π – prețul unei unități de portofoliu diversificat (indice bursier);

P – prețul unei opțiuni put protective;

B – suma depusă într-un cont bancar, sau investită în obligațiuni de stat;

E – prețul de exercițiu al opțiunii put;

Investitorul va cumpăra un număr de unități de portofoliu egal cu numărul de opțiuni protective şi egal cu:

$$x = \frac{W - B}{\Pi + P} \tag{5.65}$$

În cazul în care la scadență valoarea unei unități de portofoliu Π_T este mai mică decât E, atunci investitorul îşi exercită opțiunea call, iar averea sa va fi egală cu:

$$W_T = e^{r \cdot T} \cdot B + x \cdot E \tag{5.66}$$

În cazul în care $\Pi_T > E$, averea investitorului va fi:

$$W_T = e^{r \cdot T} \cdot B + x \cdot \Pi_T \tag{5.67}$$

În cazul în care investiția în acțiuni nu a fost profitabilă, deoarece $\Pi_T < E$, atunci trebuie ca:

$A_T = W_T$

unde A_T este pragul fixat.

Din (5.66) rezultă:

$$A_T = e^{r \cdot T} \cdot B + x \cdot E \tag{5.68}$$

Înlocuind pe x din (5.65) avem:

$$A_T = e^{r \cdot T} \cdot B + \frac{W - B}{\Pi + P} \cdot E$$

de unde rezultă valoarea care trebuie investită în active fără risc:

$$B = \frac{(\Pi + P) A_T - E \cdot W}{(\Pi + P) \times e^{r \cdot T} - E} \tag{5.69}$$

Formula (5.69) dă valoarea care trebuie investită în active fără risc. Din (5.65) şi (5.69) rezultă:

$$x = \frac{1}{\Pi + P}\left[W - \frac{(\Pi + P)A_T - E \cdot W}{(\Pi + P) \times e^{r \cdot T} - E}\right] \quad \textbf{(5.70)}$$

care reprezintă numărul de acţiuni (unităţi de portofoliu diversificat) care trebuie cumpărate, însoţite de opţiunile put protective.

Exemplu:

Vom presupune că $W = 10000000$, iar $r = 10\%$ şi $T = 3$ ani. În cazul în care investitorul nu doreşte să-şi asume nici un risc, după trei ani el va dispune de următoarea sumă:

$W_T = e^{0,1 \times 3} \cdot 10000000 = 13498588$.

Vom presupune că investitorul îşi fixează pragul minim egal cu:

$A_T = 11500000$

respectiv averea sa actuală să crească în trei ani cel puţin cu 15%, ceea ce înseamnă un ritm anual de $r_1 = 4,658\%$ (dobândă continuă).

Vom presupune că $\Pi = 900$, iar volatilitatea portofoliului diversificat este $\sigma = 11\%$. Pentru a calcula preţul putului protectiv trebuie fixat preţul de exerciţiu *E*. Întrucât investitorul doreşte să-şi asigure pe trei ani un prag de rentabilitate de cel puţin 15%, vom fixa:

$E = 900 \times 1,15 = 1035$

Avem acum toate elementele pentru calculul primei put:

$\Pi = 900;$ E=1035; σ=11%; $r = 10\%;$ T=3 ani.

Utilizând formula lui Black–Scholes rezultă:

$P = 17,6395$

Aplicând formula (5.69), rezultă:

$$B = \frac{(900+17,6395)\times 11500000 - 1035\times 10000000}{(900+17,6395)\times e^{0,1\times 3} - 1035} = 995927,45$$

Rezultă că investitorul va investi în active fără risc suma de 995927,45 (aproximativ 1 milion), restul de 9004072,54 investindu-le în acțiuni şi puturi protective.

El va cumpăra un număr de:

$$\frac{9004072,54}{917,6395} = 9812,21$$

unități de portofoliu şi acelaşi număr de opțiuni.

În cazul în care după trei ani $\Pi_M < 1035$, atunci el va dispune de următoarea sumă:

$$W_T = 995927,45\times e^{0,1\times 3} + 9812,21\times 1035 = 1344361,44 + 10155638,55 = 11500000$$

respectiv exact pragul A_T fixat.

În cazul în care $\Pi_T > 1035$, de exemplu $\Pi_T = 1270$, atunci el va dispune de:

$$W_T = 1344361\times 9812,21\times 1270 = 13805601$$

Capitolul 6. Utilizarea ecuației Black–Scholes în evaluarea obligațiunilor corporative

Vom considera o firmă a cărei bilanț, prezentat schematic, este următorul:

<table>
<tr><td>Active</td><td colspan="2">Pasive</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_t</td><td>Acțiuni</td><td>S_t</td></tr>
<tr><td>Datorii</td><td>D_t</td></tr>
</table>

Vom face următoarele ipoteze:

a) Datoria firmei, D_t, este sub forma unei obligațiuni zero-cupon având valoarea nominală (face value) egală cu F şi scadența T;

b) Piața de capital este completă şi nu permite operații de arbitraj;

c) Ecuația de dinamică a activelor este de tip standard, respectiv:

$$\frac{dA_t}{A_t} = r \cdot dt + \sigma_A \cdot dz \qquad \textbf{(6.1)}$$

Cu r s-a notat rata dobânzii, iar dz este un proces Wiener fundamental, respectiv:

$$dz_t = \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \qquad \textbf{(6.2)}$$

d) Sunt îndeplinite ipotezele teoremei Miller-Modigliani, respectiv în lipsa taxelor şi a costurilor legate de operațiile de faliment, valoarea de piață a firmei nu depinde de structura capitalului firmei. Cu alte cuvinte, valoarea de piață a firmei (A_t) nu depinde de raportul între capitalul propriu şi capitalul împrumutat ($\frac{E_t}{D_t}$)[1].

e) Acționarii firmei au responsabilitate limitată.

Firma fiind cu responsabilitate limitată, în cazul în care ea este insolvabilă la scadență, ea va fi declarată de creditori în stare de faliment. În această situație, creditorii vor primi valoarea valorificată prin operația de faliment.

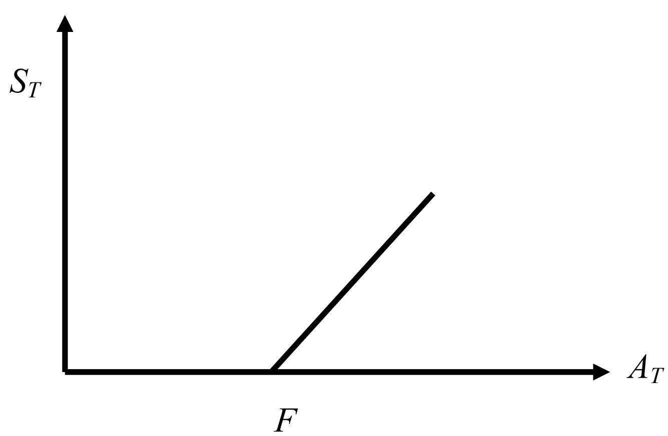
În cazul în care la scadență firma este solvabilă ($A_T > F$) creditorii vor primi valoarea F, iar posesorii de acțiuni rămân cu valoarea reziduală $A_T - F$.

Rezultă că, la scadență sunt valabile următoarele formule:

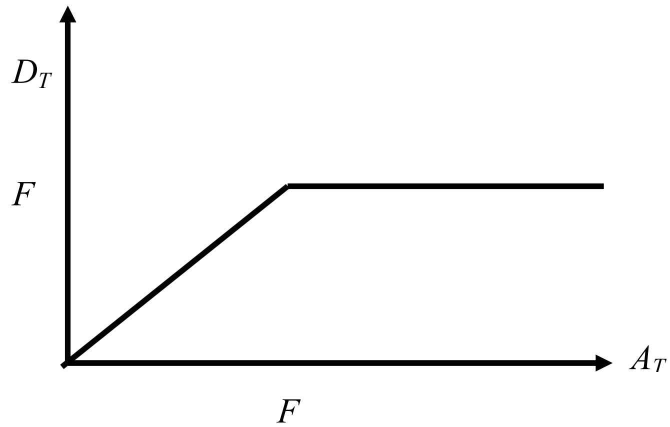
$$D_t = \begin{cases} A_t \text{ dacă } A_T < F \\ F \text{ dacă } A_T \geq F \end{cases} \quad \textbf{(6.3)}$$

$$E_t = \begin{cases} 0 \text{ dacă } A_T < F \\ A_T - F \text{ dacă } A_T \geq F \end{cases} \quad \textbf{(6.4)}$$

Grafic, formulele de mai sus, se reprezintă astfel:



[1] Vezi lucrarea: Ion Stancu – "Finanțe", ediția a treia, Editura Economică, Bucureşti, 2002



Relațiile (6.3) şi (6.4) se mai pot scrie şi astfel:

$$D_T = \min\left(F, A_T\right) \tag{6.5}$$

$$E_T = \max\left(A_T - F, 0\right) \tag{6.6}$$

Relația (6.5) se mai poate scrie astfel:

$$D_T = F - \max\left(F - A_T, 0\right) \tag{6.7}$$

Relația (6.6) arată faptul că întrucât firma a luat un credit având valoarea nominală *F*, acesta este din punct de vedere financiar echivalent cu faptul că acționarii acesteia s-au plasat pe poziția long pe o opțiune call având prețul de exercițiu *F*.

Conform cu ecuația Black–Scholes, avem:

$$E_t = A_t \cdot N\left(d_1\right) - F \cdot e^{-r(T-t)} N\left(d_2\right) \tag{6.8}$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{A_t}{F} + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\left(T - t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \;\; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{6.9}$$

Cu σ_A s-a notat coeficientul de volatilitate a firmei (a activelor).

Formula (6.7) arată că, în fapt, creditorii dețin un portofoliu format dintr-o obligațiune, poziție long, şi o opțiune put, având prețul de exercițiu *F*, poziție short:

Rezultă că:

$$D_t = F \cdot e^{-r(T-t)} - P(t, A_t) \quad \textbf{(6.10)}$$

unde:

$$P(t, A_t) = F \cdot e^{-r(T-t)} N(-d_2) - A_t \cdot N(-d_1) \quad \textbf{(6.11)}$$

Mărimea $P(t, A_t)$ cuantifică, în fapt, faptul că firma creditată este cu responsabilitate limitată, şi există riscul ca, la scadență, creditul să nu poată fi recuperat. O astfel de opțiune put se numeşte **put-to-default**.

În momentul inițial $t = 0$, avem:

$$D_0 = F \cdot e^{-rT} - P(0, A_0) = F \cdot e^{-r_1 T} \quad \textbf{(6.12)}$$

S-a notat cu r_1 rata dobânzii aplicată de creditori, rată care include şi prima de risc de faliment.

Prima de risc va fi:

$$\Pi = r_1 - r \quad \textbf{(6.13)}$$

Vom deduce, în continuare formula pentru r_1 şi pentru Π. Din (6.12) rezultă:

$$e^{-r_1 T} = e^{-rT} - \frac{1}{F} P(0, A_0) = e^{-rT} - e^{-rT} N(-d_2) + \frac{A_0}{F} N(-d_1)$$

Din relația de mai sus se deduce:

$$r_1 = \frac{\ln\left[e^{-rT}N\left(d_2\right)+\frac{A_0}{F}N\left(-d_1\right)\right]}{-T} \tag{6.14}$$

Pentru prima de risc de faliment, rezultă:

$$\Pi = r_1 - r = \frac{\ln\left[e^{-rT}N\left(d_2\right)+\frac{A_0}{F}N\left(-d_1\right)\right]}{-T} - r \tag{6.15}$$

Exemplu:

Vom presupune că la momentul inițial valoarea firmei este $A_0 = 1000$, iar volatilitatea activelor firmei este $\sigma_A = 35\%$.

Valoarea nominală a creditului este *F=700*, el fiind sub forma unei obligațiuni zero-cupon cu scadența $T = 3,5$ ani.

Rata dobânzii pe piața monetară este $r = 10\%$.

Aplicând formula lui Black–Scholes, rezultă:

$$C\left(0, A_0\right) = 538,467$$
$$P\left(0, A_0\right) = 31,749$$

iar valoarea creditului la momentul inițial este:

$$D_0 = 700 \times e^{-0,1\times 3,5} - P\left(0, A_0\right) = 493,281 - 31,749 = 461,532$$

Din calculele de mai sus, rezultă că valoarea pe care o dețin acționarii (valoarea acțiunilor) este egală cu 538,463. În ceea ce priveşte creditul primit de firmă, din valoarea nominală de 700 u.m. suma de $700 - 493,281 = 206,719$*u.m.* este reținută inițial pentru dobânzi, creditul fiind luat sub forma unei obligațiuni zero-cupon. Pe parcursul celor 3,5 ani, cât reprezintă durata de viață a creditului, firma nu va mai plăti dobânzi. La suma de 206,719 se mai adaugă valoarea putului, respectiv 31,749 u.m. care reprezintă suma reținută pentru a acoperi riscul de faliment al firmei.

Întrucât cunoaştem $D_0 = 461,532$, rata dobânzii r_1 se poate calcula direct, fără a mai face la formula (6.12).

Într-adevăr, din relația:

$461,532 = 700 \cdot e^{-r_1 \times 3,5}$

rezultă:

$r_1 = \frac{\ln 700 - \ln 461,532}{3,5} = 11,9\%$

Prima de risc va fi:

$\Pi = 0,119 - 0,1 = 1,9\%$

Volatilitatea debitului

Vom nota, ca şi până acum, cu D_t valoarea de piață a creditului:

$$D_t = D_t\left(t, A_t\right) \tag{6.16}$$

În ceea ce priveşte A_t, ştim că:

$dA_t = r \cdot A_t \cdot dt + \sigma_A \cdot A_t \cdot dz$

Aplicând lema lui Ito, avem:

$$dD_t = \left(\frac{\partial D_t}{\partial t} + r \cdot A_t \frac{\partial D_t}{\partial A_t} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 \cdot A_t^2 \frac{\partial^2 D_t}{\partial A_t^2}\right) dt + \sigma_A \cdot A_t \cdot \frac{\partial D_t}{\partial A_t} dz \tag{6.17}$$

Ecuația (6.17) se poate scrie, generic, sub forma:

$$\frac{\partial D_t}{D_t} = \mu_D dt + \sigma_D dz \tag{6.18}$$

Din comparația formulelor (6.17) şi (6.18), rezultă:

$$\sigma_D = \sigma_A \cdot \frac{A_t}{D_t} \cdot \frac{\partial D_t}{\partial A_t} \tag{6.19}$$

Formula (6.19) dă valoarea volatilității σ_D a debitului.

Ținând seama că:

$$D_t = F \cdot e^{-r(T-t)} - P(t, A_t) \tag{6.20}$$

rezultă că:

$$\frac{\partial D_t}{\partial A_t} = -\frac{\partial P(t, A_t)}{\partial A_t} = -\Delta_P = N(-d_1) \tag{6.21}$$

Ținând seama de (6.21), forma (6.19) se mai scrie:

$$\sigma_D = \sigma_A \cdot \frac{A_t \cdot N(-d_1)}{D_t} \tag{6.22}$$

Folosind şi formula (6.20), obținem:

$$\sigma_D = \sigma_A \cdot \frac{A_t \cdot N(-d_1)}{F \cdot e^{-r(T-t)} - e^{-rT} F \cdot N(-d_2) + A_t \cdot N(-d_1)}$$

respectiv:

$$\sigma_D = \sigma_A \cdot \frac{N(-d_1)}{l_t \cdot N(d_2) + N(-d_1)} \tag{6.23}$$

Cu l_t s-a notat:

$$l_t = \frac{F \cdot e^{-r(T-t)}}{A_t} \qquad \textbf{(6.24)}$$

Care cuantifică raportul de îndatorare a firmei. Vom observa, însă, că adevăratul raport de îndatorare a firmei la momentul *t* este:

$$\hat{l}_t = \frac{D_t}{A_t} \qquad \textbf{(6.25)}$$

Rezulta ca raportul l_t dat de quasi-formula (6.22) reprezinta un raport de indatorare a firmei.

O observatie importanta cu privire la volatilitatea debitului D_t, dat de formula (6.22) se refera la faptul ca el nu este constant, ci variaza in timp. Cu alte cuvinte :

$$\sigma_D = \sigma_t(t) \qquad (6.24)$$

In cazul exemplului considerat in acest capitol, la momentul t=0, avem:

$$l_0 = \frac{Fe^{-r*T}}{A_0} = \frac{493,281}{1000} = 0,49328$$

$$\sigma_D(0) = 0.35 * \frac{0,07977}{0,49328 * 0,7739 + 0,07977}$$

respectiv:

$$\sigma_D(0) = 0,0605 = 6,05\%$$

Din formula (6.21) se vede ca intotdeauna avem:

$$\sigma_D < \sigma_A \qquad (6.25)$$

Revenind la formula (6.12), aceasta se mai poate scrie:

$$r_1 = \frac{1}{-T}\ln\left[e^{-r^*T}\left(N(d_2) + \frac{1}{l_0}N(-d_1)\right)\right]$$

respectiv :

$$r_1 = r - \frac{1}{T}\ln\left[\left(N(d_2) + \frac{1}{l_0}N(-d_1)\right)\right] \tag{6.26}$$

Din (6.26) rezulta :

$$\pi = r_1 - r = -\frac{1}{T}\ln\frac{l_0 N(d_2) + N(-d_1)}{l_0}$$

respectiv :

$$\pi = r_1 - r = -\frac{1}{T}\left[\ln\left[l_0 N(d_2) + N(-d_1)\right] - \ln l_0\right] \tag{6.27}$$

Din (6.21) rezulta :

$$l_0 N(d_2) + N(-d_1) = \frac{\sigma_A}{\sigma_D}N(-d_1) \tag{6.28}$$

iar din (6.27) se obtine :

$$\pi = r_1 - r = -\frac{1}{T}\left[\ln\frac{\sigma_A}{\sigma_D}N(-d_1) - \ln l_0\right] \tag{6.29}$$

Vom analiza modul in care prima de risc π depinde de diverse caracteristici ale firmei:

- In raport cu raportul de indatorare l_0 avem :

$$\frac{\partial \pi}{\partial l_0} = -\frac{1}{T}\left[\frac{\partial N(-d_1)}{\partial d_1} * \frac{\partial d_1}{\partial l_0} - \frac{1}{l_0}\right] \qquad (6.30)$$

Din $d_1 = \dfrac{\ln \dfrac{A_0}{F_0 e^{-rT}} + \dfrac{\sigma_A^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} = \dfrac{\ln \dfrac{1}{l_0} + \dfrac{\sigma_A^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}}$

rezulta :

$$\frac{\partial d_1}{\partial l_0} = -\frac{\frac{1}{l_0}}{\sigma_A \sqrt{T} - 1}$$

De asemenea, avem :

$$\frac{\partial N(-d_1)}{\partial d_1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Din (6.30) rezulta :

$$\frac{\partial \pi}{\partial l_0} = -\frac{1}{T}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{l_0 \sigma_A \sqrt{T}} - \frac{1}{l_0}\right]$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial l_0} = \frac{1}{T}\frac{1}{l_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} * \frac{1}{\sigma_A \sqrt{T}}\right] > 0 \qquad (6.31)$$

Formula (6.31) arata ca prima de risc π creste odata cu raportul de indatorare l_0.

Pentru a vedea modul in care prima de risc in raport cu volatilitatea firmei, este preferabil sa utilizam formula (6.27).

Avem :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma_A} = -\frac{1}{T} * \frac{1}{l_0 N(d_2) + N(-d_1)} * \frac{\partial}{\partial \sigma_A}\left[l_0 N(d_2) + N(-d_1)\right]$$

respectiv :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma_A} = -\frac{1}{T} * \frac{1}{l_0 N(d_2) + N(-d_1)}\left[l_0 f(d_2)\left(\frac{\sqrt{T}}{2} - \sqrt{T}\right) - f(-d_1) * \frac{\sqrt{T}}{2}\right] \qquad (6.31)$$

Cu f(d) s-a notat densitatea de repartitie pentru repartitia normala, respectiv $f(d) = \frac{\partial F(d)}{\partial d}$

Din (6.31) rezulta :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \sigma_A} = -\frac{1}{T} * \frac{\sqrt{T}}{2 * \left[l_0 N(d_2) + N(-d_1)\right]}\left[-l_0 f(d_2) - f(-d_1)\right] > 0$$

Cu alte cuvinte, asa cum era de asteptat, prima de risc de faliment π creste o data cu cresterea volatilitatii firmei.

Cazul creditelor junior

Vom presupune acum ca firma a facut doua credite : unul senior si unul junior.

Creditul senior se plateste cu prioritate. In caz de insolvabilitate a firmei, creditul junior se plateste in limita sumei ramase dupa plata creditului senior. Notand in acest caz cu $D_{t,s}$ valoarea creditului senior (prioritar) si cu $D_{t,j}$ valoarea creditului junior (subordonat), avem:

$$D_{T,s} = \min(F_s, A_T) \qquad (6.32)$$

$$D_{T,j} = \max[\min(A_T - F_s, F_j), 0] \qquad (6.33)$$

$$E_T = \max[A_T - F_s - F_j, 0] \qquad (6.34)$$

Cu F_s si F_j s-a notat valoarea nominala a creditului senior, respectiv junior.

Din formulele (6.32) si (6.34) se observa ca in ceea ce priveste creditul senior si valoarea actiunilor, principial nu se midifica nimic.

In ceea ce priveste creditul junior, din (6.33) se observa ca se poate scrie:

$$D_{t,j} = C(t, F_s) - C(t, F_s+F_j) \qquad (6.35)$$

Cu alte cuvinte creditorul care a acordat un credit junior, in fapt detine un portofoliu format dintr-o optiune CALL avand pretul de exercitiu egal cu F_s – pozitie long, si o optiune avand pretul de exercitiu egal cu F_s+F_j – pozitie short.

Exemplu

Pentru exemplificare, vom presupune ca in cadrul exemplului analizat in acest capitol, creditul de 700 u.m. este acordat sub forma unui credit senior in valoare de F_s=500 si al unui credit junior in valoare de F_j=200.

In ceea ce priveste E_0, valoarea acestuia va fi la fel ca inainte, respectiv :

E_0 = 538,467

Pentru optiunea put $P(0, A_0)$, tinand seama ca acum pretul de exercitiu este egal cu F_j=500, avem:

$P(0, A_0)$=8,8266

Valoarea creditului la momentul t=0 este:

$D_{0,s} = 500 * e^{-0,1*3,5} - 8,8266 = 343,517$

Prima de risc in acest caz va fi :

$\pi_j = 0,1072 - 0,1 = 0,0072 = 0,72\%$

Pentru calculul creditului junior avem :

C(0,500)=656,4826

C(0,700)=538,4676

de unde rezulta:

$D_{0,j}$=656,4826-538,4676=118,015

Prima de risc pentru premiul junior va fi :

$\pi = 0,1507 - 0,1 = 0,0507 = 5,07\%$

Asa cum era de asteptat, prima pentru riscul de faliment este mai mare pentru creditul junior.