ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE

INGINERIE FINANCIARA – II

Prof. univ. dr. Moisă Altăr - coordonator

București, mai 2003

1. Obligațiuni zero-cupon - cazul stocastic

Prof. univ. dr. Moisă Altăr

In prezent, derivativele pe rata dobînzii joacă un rol extrem de important pe piața internațională de capital. Pentru exemplificare menționăm faptul că, conform statisticilor BIS, din totalul de 142 mii de miliarde dolari cît a reprezentat volumul tranzacțiilor cu derivative în luna decembrie 2002 pe piața OTC, peste 101 mii de miliarde dolari (circa 71%) au fost derivative pe rata dobînzii (pe obligațiuni).

Tinînd seama de importanța problematicii, în continuare se prezintă cîteva elemente privind obligațiunile zero-cupon. Aceasta va permite identificarea mecanismului de evaluare a acestor instrumente, precum şi o mai bună înțelegere a noțiunii de structură temporală a ratei dobînzii („term structure of interest rate").

Vom utiliza următoarele notații:

$P(t,T)$ - prețul la momentul t al unei obligațiuni zero – cupon care are scadența la momentul T

$R(t,T)$ - rentabilitatea la scadență calculată în momentul t pentru o obligațiune zero-cupon cu scadență T („the yield to maturity")

$f(t,T)$ - rata forward instantanee în momentul t pentru o obligațiune zero-cupon cu scadența T.

Avem următoarele formule de calcul pentru rentabilitatea la scadență şi rata forward instantanee:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{1}$$

de unde rezultă:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} \tag{2}$$

Pentru rata forward avem că:

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\} \tag{3}$$

de unde:

$$\ln P(t,T) = -\int_t^T f(t,s)ds \qquad (4)$$

Notînd cu H primitiva lui f , putem scrie:

$$\ln P(t,T) = -H(t,s)\Big|_t^T = -\big(H(t,T) - H(t,t)\big) \qquad (5)$$

Derivînd ambii termeni obținem:

$$\frac{\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}}{P(t,T)} = -f(t,T) \qquad (6)$$

sau:

$$f(t,T) = -\frac{\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}}{P(t,T)} \qquad (7)$$

Din formulele (2) şi (7) rezultă că:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds \qquad (8)$$

Formula (8) arată că rentabilitatea la scadență este, în fapt, media ratelor forward pe tot intervalul $[t,T]$.

In continuare vom presupune că prețul obligațiunii depinde de rata instantanee a dobînzii, $r(t)$, respectiv

$$P = P(t,T,r) \qquad (9)$$

In ceea ce priveşte rata instantanee a dobînzii, ea este un proces stocastic despre care vom presupune că este descris de următoarea ecuație de tip Ito:

$$dr = a(t,r)dt + b(t,r)dz \qquad (10)$$

Aplicînd lema lui Ito obținem:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + a(t,r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}b^2(t,r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right)dt + b(t,T)\frac{\partial P}{\partial r}dz \qquad (11)$$

sau:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(t,r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right)dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr \qquad (12)$$

Pentru uşurința scrierii vom introduce următoarea notație:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} \qquad (13)$$

Cu această notație formula (12) se scrie:

$$dP = \nabla P\, dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr \qquad (14)$$

Vom aminti că notația ∇P se citeşte: operatorul (funcția) ∇ aplicat lui P. Notația este asemănătoare cu cea din cazul funcțiilor obişnuite $f(x)$ numai că nu a mai fost pusă paranteza.

Pentru deducerea ecuației fundamentale de dinamică a prețului, vom forma un portofoliu de două obligațiuni cu scadențe diferite.

Vom nota:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(t,T_1,r) \\ P_2 &= P(t,T_2,r) \end{aligned} \qquad (15)$$

Portofoliul este:

$$\Pi = P_1 - hP_2 \qquad (16)$$

unde h este raportul de hedging.

Conform ecuației (14) avem:

$$\mathrm{d}\Pi = (\nabla \mathrm{P}_1 - \mathrm{h}\,\nabla \mathrm{P}_2)\mathrm{dt} + \left(\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial \mathrm{r}} - \mathrm{h}\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial \mathrm{r}} \right)\mathrm{dr} \qquad (17)$$

Pentru a elimina factorul de risc, vom lua:

$$h = \frac{\partial P_1}{\partial r} \bigg/ \frac{\partial P_2}{\partial r} \qquad (18)$$

Tinînd seama că portofoliul a devenit un portofoliu fără risc avem:

$$d\Pi = \left(\nabla P_1 - \left(\frac{\partial P_1}{\partial r} \bigg/ \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) \nabla P_2 \right) dt = r\,(P_1 - hP_2)dt \qquad (19)$$

In egalitatea de mai sus, grupînd termenii ce se referă la P_1, respectiv P_2 obținem:

$$\frac{\nabla P_1 - r\,P_1}{\frac{\partial P_1}{\partial r}} = \frac{\nabla P_2 - r\,P_2}{\frac{\partial P_2}{\partial r}} \qquad (20)$$

Se observă că raportul

$$\frac{\nabla P - r\,P}{\frac{\partial P}{\partial r}} \qquad (21)$$

este constant în raport cu T, respectiv nu depinde de T.

Vom nota:

$$\frac{\nabla P - r\,P}{\frac{\partial P}{\partial r}} = c(t,r) \qquad (22)$$

Introducem substituția:

$$\lambda(t,r) = \frac{c(t,r) + a(t,r)}{b(t,r)} \qquad (23)$$

respectiv:

$$c(t,r) = \lambda(t,r) b(t,r) - a(t,r) \qquad (24)$$

Formula (22) devine:

$$\frac{\nabla P - r\,P}{\frac{\partial P}{\partial r}} = \lambda(t,r) b(t,r) - a(t,r) \qquad (25)$$

de unde:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \left[a(t,r) - \lambda(t,r) b(t,r) \right] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} b^2(t,r) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP \qquad (26)$$

Relația (25) reprezintă formula fundamentală privind dinamica prețului unei obligațiuni zero-cupon. Ea este analoagă cu ecuația Merton-Black-Scholes, dar conține în plus factorul λ, numit preţul de piaţă al riscului.

In literatura de specialitate au fost propuse un număr important de modele de evaluare a obligațiunilor. Ele diferă în special prin modul în care este definită ecuația de dinamică a ratei instantanee a dobînzii. In continuare prezentăm trai astfel de modele, pentru care se precizează modul în care evoluează $r(t)$:

a) Modelul Vasicek (1976)

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \qquad (26)$$

b) Modelul Cox Ingersol Ross (CIR) (1985)

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \qquad (27)$$

c) Modelul Merton (1973)

$$dr = \mu dt + \sigma dz \qquad (28)$$

Pentru toate aceste modele, ecuația prețului obligațiunii zero-cupon este de forma:

$$P(t,T) = e^{A(\tau)-B(\tau)\, r(t)} \qquad (29)$$

unde $\tau = T - t$

Avem:

$$A(0) = 0, \quad B(0) = 0 \qquad (30)$$

Menționăm că în cazul modelului lui Merton, care este cel mai simplu, avem:

$$B(\tau) = \tau \qquad (31)$$

$$A(\tau) = -\frac{1}{2}(\mu - \sigma\lambda)\tau^2 + \frac{1}{6}\sigma^2\,\tau^3 \qquad (32)$$

Deci ecuația prețului unei obligațiuni zero-cupon în acest caz este:

$$P(t,T) = \exp\left\{-r\tau - \frac{1}{2}(\mu - \sigma\lambda)\tau^2 + \frac{1}{6}\sigma^2\,\tau^3\right\} \qquad (33)$$

2. Derivative pe mai multe active suport

Prep. univ. drd. Ciprian Necula

1. Distribuția normală bidimensională

Vectorul aleator $X = (X_1, X_2)'$ cu medie $E[X] = m = (m_1, m_2)'$ şi matrice de varianță-covarianță $\mathrm{E}\left[(\mathrm{X}-\mathrm{E}[\mathrm{X}])(\mathrm{X}-\mathrm{E}[\mathrm{X}])'\right] = \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ are o distribuție normală bidimensională notată cu $\Phi_2(m,\Omega)$ dacă are densitatea de repartiție dată de:

$$f_2(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(t-m)'\Omega^{-1}(t-m)\right\} \quad \text{unde} \quad t=(t_1,t_2)' \qquad (1)$$

Se ştie că dacă $X \sim \Phi_2(m,\Omega)$ atunci avem că:

1) $X_1 \sim \Phi(m_1,\sigma_1), X_2 \sim \Phi(m_2,\sigma_2)$
2) $a_1X_1 + a_2X_2 \sim \Phi(a_1m_1 + a_2m_2, \sigma), unde \ \sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + 2\rho a_1 a_2\sigma_1\sigma_2$ (2)

Dacă $m_1 = m_2 = 0$ şi $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ spunem că avem o distribuție normală bidimensională standard cu coeficient de corelație ρ, iar pentru funcția de repartiție a acestei distribuții $N_2(x,y;\rho) := \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_2(t_1,t_2)dt_1dt_2$ există formule de aproximare (vezi de exemplu Hull Apendix 11C).

2. Proces Wiener bidimensional

$z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ este proces Wiener bidimensional (miscare browniană bidimensională) cu coeficient de corelație ρ dacă:
1) $z_1(0) = z_2(0) = 0$
2) Variația procesului între două momente de timp $z(T) - z(t)$ este independentă de informațiile acumulate pînă la monentul t
3) $z(T) - z(t) \sim \Phi_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T-t & \rho(T-t) \\ \rho(T-t) & T-t \end{pmatrix}\right)$

Pentru un interval scurt de timp dt variația procesului are următoare distribuție:

$$dz(t) = \begin{pmatrix} dz_1(t) \\ dz_2(t) \end{pmatrix} \sim \Phi_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dt & \rho dt \\ \rho dt & dt \end{pmatrix}\right) \qquad (3)$$

Pentru a pune în evidență coeficientul de corelație ρ se foloseşte notația $dz_1(t)dz_2(t) = \rho dt$.

3.Proces Ito bidimensional şi lema Ito bidimensională

Fie $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ un proces Ito bidimensional:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t) = a_1(t, x_1(t), x_2(t))\mathrm{d}t + b_1(t, x_1(t), x_2(t))\mathrm{d}z_1(t) \\ \mathrm{d}x_2(t) = a_2(t, x_1(t), x_2(t))\mathrm{d}t + b_2(t, x_1(t), x_2(t))\mathrm{d}z_2(t) \end{cases}, \text{unde } \mathrm{d}z_1(t)\mathrm{d}z_2(t) = \rho \mathrm{d}t$$

şi fie o funcție $G : R_+ \times R^2 \to R$.

Ne interesează variația lui $G(t, x_1(t), x_2(t))$. Conform lemei lui Ito bidimensională avem că:

$$\begin{aligned} dG = & \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} + \frac{1}{2} b_1^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} b_2^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \rho b_1 b_2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dt + \\ & + b_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} dz_1 + b_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} dz_2 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Evoluția cursului a două active

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_1 = \mu_1 S_1 \mathrm{d}t + \sigma_1 S_1 \mathrm{d}z_1 \\ \mathrm{d}S_2 = \mu_2 S_2 \mathrm{d}t + \sigma_2 S_2 \mathrm{d}z_2 \end{cases}, \text{unde } \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 = \rho \mathrm{d}t \tag{5}$$

Exercițiu

Ştiindu-se parametrii modelului precum şi cursul celor două active la momentul actual $S_1(t), S_2(t)$ să se calculeze probabilitatea ca la momentul T să avem că $S_1(T) > S_2(T)$.

Rezolvare

Aplicînd lema lui Ito bidimensională pentru funcțiile $\ln S_1$ respectiv $\ln S_2$ obținem că:

$$\begin{cases} d \ln S_1 = \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)(T - t) + \sigma_1 dz_1 \\ d \ln S_2 = \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right)(T - t) + \sigma_2 dz_2 \end{cases} \tag{6}$$

De aici rezultă că :

$$\begin{cases} \ln S_1(T) - \ln S_1(t) = \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right)(T - t) + \sigma_1 (z_1(T) - z_1(t)) \\ \ln S_2(T) - \ln S_2(t) = \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right)(T - t) + \sigma_2 (z_2(T) - z_2(t)) \end{cases}$$

Deci

$$\begin{pmatrix}\ln S_1(T)\\ \ln S_2(T)\end{pmatrix} \sim \Phi_2\left(\underbrace{\begin{pmatrix}\ln S_1(t)-\left(\mu_1-\sigma_1^2/2\right)(T-t)\\ \ln S_2(t)-\left(\mu_2-\sigma_2^2/2\right)(T-t)\end{pmatrix}}_{m}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2(T-t) & \rho\sigma_1\sigma_2(T-t)\\ \rho\sigma_1\sigma_2(T-t) & \sigma_2^2(T-t)\end{pmatrix}\right)$$

Folosind (2) avem că:

$$\underbrace{\ln S_1(T)-\ln S_2(T)}_{X} \sim \Phi\left(\underbrace{m_1-m_2}_{\mu}, \underbrace{\sigma\sqrt{T-t}}_{v}\right) \quad \text{unde } \sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2$$

Dar $\dfrac{X-\mu}{v} \sim \Phi(0,1)$, deci:

$$\begin{aligned} P(S_1(T)>S_2(T)) &= P(\ln S_1(T)>\ln S_2(T)) = P(X>0)\\ &= P\left(\frac{X-\mu}{v} > -\frac{\mu}{v}\right) = 1-N\left(-\frac{\mu}{v}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

5. Opțiuni curcubeu

Opțiunile curcubeu sunt produse financiare al căror payoff la scadență (T) depinde de $S_1(T)$ şi $S_2(T)$. Deci pot fi considerate derivative care au două active suport.

Prima la momentul $t<T$ al unui astfel de derivativ va depinde $t, S_1(t), S_2(t)$. Vom nota această primă cu $D(t,S_1,S_2)$.

5.1 Ecuația de evaluare a unei opțiuni curcubeu

Vom considera un portofoliu format dintr-o poziție -1 pe derivativ, h_1 pe primul activ suport şi h_2 pe cel de al doilea activ suport:

$$\Pi = -D + h_1 S_1 + h_2 S_2 \tag{8}$$

Variația valorii acestui portofoliu este (folosind (4) şi (5)):

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dD + h_1 dS_1 + h_2 dS_2\\ &= -\left[\left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mu_1 S_1\frac{\partial D}{\partial S_1} + \mu_2 S_2\frac{\partial D}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2\frac{\partial^2 D}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2\frac{\partial^2 D}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2\frac{\partial^2 D}{\partial S_1\partial S_2}\right)dt + \right.\\ &\qquad \left. + \sigma_1 S_1\frac{\partial D}{\partial S_1}dz_1 + \sigma_2 S_2\frac{\partial D}{\partial S_2}dz_2\right] + h_1(\mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1) + h_2(\mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2) \end{aligned}$$

$$= \left[h_1\mu_1 S_1 + h_{21}\mu_2 S_2 - \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mu_1 S_1 \frac{\partial D}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial D}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 D}{\partial S_1 \partial S_2} \right) \right] dt +$$

$$+ \sigma_1 S_1 \left(h_1 - \frac{\partial D}{\partial S_1} \right) dz_1 + \sigma_2 S_2 \left(h_2 - \frac{\partial D}{\partial S_2} \right) dz_2 \qquad (9)$$

Pentru ca Π să fie portofoliu fără risc trebuie ca

$$h_1 = \frac{\partial D}{\partial S_1} \text{ şi } h_2 = \frac{\partial D}{\partial S_2} \qquad (10)$$

Deoarece nu există posibilități de arbitraj trebuie ca portofoliul fără risc Π să aibă rentabilitatea egală cu rata dobînzii fără risc:

$$d\Pi = r\Pi dt \qquad (11)$$

Folosind (9),(10) şi (11) avem că:

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \mathrm{S}_1^2 \frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \mathrm{S}_2^2 \frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 \frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}_1 \partial \mathrm{S}_2} \right) = \mathrm{r}\left(-\mathrm{D} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}_1} \mathrm{S}_1 + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \mathrm{S}_2} \mathrm{S}_2 \right)$$

De aici rezultă ecuația de evaluare pentru o opțiune curcubeu:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + rS_1 \frac{\partial D}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial D}{\partial S_2} \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 D}{\partial S_1 \partial S_2} = rD \qquad (12)$$

Ecuația (12) este verificată de prima oricărei opțiuni curcubeu. Pentru a afla prima pentru o opțiune anume trebuie pusă şi o condiție la scadență (T) şi anume:

$$D(T, S_1, S_2) = Payoff_{optiune} \qquad (13)$$

<u>5.2 Tipuri opțiuni curcubeu</u>

1) <u>Opțiunea de a schimba cele două active (Spread options)</u>

$$Payoff_{Spread} = \max(S_1(T) - S_2(T), 0) \qquad (14)$$

Prima acestei opțiuni la momentul $t < T$ va fi:

$$Spread(t, S_1, S_2) = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2) \qquad (15)$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_1/S_2) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

Demonstrație[1]

Se observă că putem scrie payoff-ul opțiunii spread astfel:

$$\max\left(S_1 - S_2, 0\right) = S_2 \max\left(S_1/S_2 - 1, 0\right) = S_2 H\left(T, S_1/S_2\right) \text{ unde } H\left(T, x\right) := \max\left(x - 1, 0\right)$$

Datorită formei payoff-ului vom căuta o soluție a ecuației de evaluare (12) de forma:

$$D\left(t, S_1, S_2\right) = S_2 H\left(t, S_1/S_2\right)$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x = S_1/S_2$, vom căuta să obținem o ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru $H\left(t, x\right)$ (care să semene cu ecuația Black-Scholes a cărei soluție o știm) . Avem că:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = S_2 \frac{\partial H}{\partial t}; \frac{\partial D}{\partial S_1} = \frac{\partial H}{\partial x}; \frac{\partial D}{\partial S_2} = H - \frac{S_1}{S_2}\frac{\partial H}{\partial x}; \frac{\partial^2 D}{\partial S_1^2} = \frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 D}{\partial S_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^3}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 D}{\partial S_1 \partial S_2} = -\frac{S_1}{S_2^2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

Inlocuind in ecuația (12) derivatele parțiale de mai sus și folosind schimbarea de variabilă obținem următoarea ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru $H\left(t, x\right)$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$$

cu condiția pe frontireră $H\left(T, x\right) := \max\left(x - 1, 0\right)$.
Se observă aceasta este ecuația Black-Scholes pentru call in care $r = 0, K = 1$. Deci

$$H\left(t, x\right) := xN\left(d_1\right) - N\left(d_2\right)$$

Dar $Spread\left(t, S_1, S_2\right) = S_2 H\left(t, S_1/S_2\right)$ și se obține (15)

2) Opțiunea de a „livra” activul mai scump

$$\begin{aligned} Payoff_{Optmax} &= \max\left(S_1(T), S_2(T)\right) \\ &= S_2(T) + \max\left(S_1(T) - S_2(T), 0\right) = S_2(T) + Payoff_{Spread} \end{aligned} \quad (16)$$

Folosind un argument de arbitraj avem că prima acestei opțiuni la momentul $t < T$ va fi:

$$Optmax\left(t, S_1, S_2\right) = S_2(t) + Spread\left(t, S_1, S_2\right) \quad (17)$$

3) Opțiunea de a „livra” activul mai ieftin

$$\begin{aligned} Payoff_{Optmin} &= \min\left(S_1(T), S_2(T)\right) = S_1(T) + \min\left(S_2(T) - S_1(T), 0\right) \\ &= S_1(T) - \max\left(S_1(T) - S_2(T), 0\right) = S_1(T) - Payoff_{Spread} \end{aligned} \quad (18)$$

Folosind un argument de arbitraj avem că prima acestei opțiuni la momentul $t < T$ va fi:

$$Optmin\left(t, S_1, S_2\right) = S_1(t) - Spread\left(t, S_1, S_2\right) \quad (19)$$

[1] Textul scris cu litere mici nu este obligatoriu pentru examen

4) Opțiunea de a „livra" activul mai scump sau o sumă de bani

$$Payoff_{Optmaxcash} = \max\left(S_1(T), S_2(T), K\right) \qquad (20)$$

Prima acestei opțiuni este dată de:

$$Optmaxcash\left(t, S_1, S_2\right) = S_1\left[N\left(\delta_1\right) - N_2\left(-d_1, \delta_1; \rho_1\right)\right] + S_2\left[N\left(\delta_2\right) - N_2\left(-d_2, \delta_2; \rho_2\right)\right] +$$
$$+ Ke^{-r(T-t)} N_2\left(-d_1 + \sigma_1\sqrt{T-t}, -d_2 + \sigma_2\sqrt{T-t}; \rho\right)$$

unde

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_1/K\right) + \frac{\sigma_1^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = \frac{\ln\left(S_2/K\right) + \frac{\sigma_2^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\delta_1 = \frac{\ln\left(S_1/S_2\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad \delta_2 = \frac{\ln\left(S_2/S_1\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\rho_1 = \frac{\rho\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma}, \qquad \rho_2 = \frac{\rho\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma}, \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

5) Opțiuni call și put pe maximul a două active

$$\begin{aligned} Payoff_{c_{\max}} &= \max\left(\max\left(S_1(T), S_2(T)\right) - K, 0\right) \\ Payoff_{p_{\max}} &= \max\left(K - \max\left(S_1(T), S_2(T)\right), 0\right) \end{aligned} \qquad (21)$$

Exercițiu

Să se arate că există următoarele relații de paritate:

1) $c_{\max}\left(t, S_1, S_2\right) = Optmaxcash\left(t, S_1, S_2\right) - Ke^{-r(T-t)}$

2) $c_{\max}\left(t, S_1, S_2\right) + Ke^{-r(T-t)} = p_{\max}\left(t, S_1, S_2\right) + Optmax\left(t, S_1, S_2\right)$ (22)

6) Opțiuni call și put pe maximul a două active

$$\begin{aligned} Payoff_{c_{\min}} &= \max\left(\min\left(S_1(T), S_2(T)\right) - K, 0\right) \\ Payoff_{p_{\min}} &= \max\left(K - \min\left(S_1(T), S_2(T)\right), 0\right) \end{aligned} \qquad (24)$$

Exercițiu

Să se arate că există următoarele relații de paritate:

1) $\mathrm{c_{max}}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_1}, \mathrm{S_2}\right) + \mathrm{c_{min}}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_1}, \mathrm{S_2}\right) = \mathrm{c_{BlackScholes}}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_1}, \mathrm{K}\right) + \mathrm{c_{BlackScholes}}\left(\mathrm{t}, \mathrm{S_2}, \mathrm{K}\right)$

2) $c_{\min}\left(t, S_1, S_2\right) + Ke^{-r(T-t)} = p_{\min}\left(t, S_1, S_2\right) + Optmin\left(t, S_1, S_2\right)$ (25)

5. Quanto

Quanto-urile sunt derivative tranzacționate într-o țara (de exemplu SUA) pe un activ suport tranzacționat într-o altă țară (de exemplu indicele Nikkei din Japonia). Fiind tranzacționat în SUA payoff-ul unui quanto este exprimat în USD.

Vom nota cu:

S - cursul indicelui Nikkei exprimat în JPY

Q - cursul valutar USD/JPY (1 JPY = Q USD)

r - rata dobînzii în SUA

r_f - rata dobînzii în Japonia

Prima la momentul $t < T$ al unui astfel de derivativ va depinde $t, S(t), Q(t)$. Vom nota această primă cu $D(t, S, Q)$.

Variația în timp a celor doi factori de influență este:

$$\begin{cases} dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz_S \\ dQ = (\mu_Q - r_f) Q dt + \sigma_Q Q dz_Q \end{cases}, \text{unde } dz_S dz_Q = \rho dt \qquad (26)$$

5.1 Ecuația de evaluare a unui quanto

Vom considera un portofoliu format dintr-o poziție -1 pe derivativ, h_Q yeni şi h_S unități din indicele Nikkei. Valoarea portofoliului (exprimată în USD) este:

$$\Pi = -D + h_Q Q + h_S SQ \qquad (27)$$

Variația valorii acestui portofoliu este (folosind (4) şi (26)):

$$d\Pi = -dD + h_Q dQ + h_S d(SQ) + \underbrace{h_Q r_f Q dt}_{\substack{\text{dobinda la yeni} \\ \text{exprimata in USD}}}$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mu_S S \frac{\partial D}{\partial S} + (\mu_Q - r_f) Q \frac{\partial D}{\partial Q} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 Q^2 \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2} + \rho\sigma_S\sigma_Q SQ \frac{\partial^2 D}{\partial S \partial Q}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \sigma_S S \frac{\partial D}{\partial S} dz_S + \sigma_Q Q \frac{\partial D}{\partial Q} dz_Q \right] + h_Q \left((\mu_Q - r_f) Q dt + \sigma_Q Q dz_Q\right) + h_Q r_f Q dt$$

$$+ h_S \left[(\mu_S + \mu_Q - r_f + \rho\sigma_S\sigma_Q) SQ dt + \sigma_S SQ dz_S + \sigma_Q SQ dz_Q\right]$$

$$= \left[h_Q \mu_Q Q + h_S (\mu_S + \mu_Q - r_f + \rho\sigma_S\sigma_Q) SQ - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mu_S S \frac{\partial D}{\partial S} + (\mu_Q - r_f) Q \frac{\partial D}{\partial Q} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 Q^2 \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2} + \rho\sigma_S\sigma_Q SQ \frac{\partial^2 D}{\partial S \partial Q}\right)\right] dt$$

$$+\sigma_S S\left(h_S Q-\frac{\partial D}{\partial S}\right)dz_S+\sigma_Q Q\left(h_Q+h_S S-\frac{\partial D}{\partial Q}\right)dz_Q \qquad (28)$$

Pentru ca Π să fie portofoliu fără risc trebuie ca

$$h_S=\frac{1}{Q}\frac{\partial D}{\partial S} \text{ şi } h_Q=\frac{\partial D}{\partial Q}-\frac{S}{Q}\frac{\partial D}{\partial S} \qquad (29)$$

Deoarece nu există posibilităţi de arbitraj trebuie ca portofoliul fără risc Π să aibă rentabilitatea egală cu rata dobînzii fără risc:

$$d\Pi = r\Pi dt \qquad (30)$$

Folosind (28),(29) şi (30) avem că:

$$-\left(\frac{\partial D}{\partial t}+\left(r_f-\rho\sigma_S\sigma_Q\right)S\ \frac{\partial D}{\partial S}-r_f Q\frac{\partial D}{\partial Q}+\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2\ \frac{\partial^2 D}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\sigma_Q^2 Q^2\ \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2}+\rho\sigma_S\sigma_Q SQ\frac{\partial^2 D}{\partial S\partial Q}\right)=$$

$$=r\left(-D+Q\frac{\partial D}{\partial Q}\right)$$

De aici rezultă ecuaţia de evaluare pentru un quanto:

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\left(r_f-\rho\sigma_S\sigma_Q\right)S\ \frac{\partial D}{\partial S}+\left(r-r_f\right)Q\frac{\partial D}{\partial Q}+\frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2\ \frac{\partial^2 D}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\sigma_Q^2 Q^2\ \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2}+\rho\sigma_S\sigma_Q SQ\frac{\partial^2 D}{\partial S\partial Q}=rD \quad (31)$$

Ecuaţia (31) este verificată de prima oricărui quanto. Pentru a afla prima pentru o opţiune anume trebuie pusă şi o condiţie la scadenţă (T):

$$D(T,S,Q)=\text{Payoff}_{\text{optiune}} \qquad (32)$$

5.2 Tipuri de quanto

1) Opţiuni quanto cu pretul de exerciţiu (K) fixat în JPY

Payoff-ul în SUA va fi:

$$\text{Payoff}_{\text{Quantocall}}=\max\left(S(T)Q(T)-KQ(T),0\right)=Q(T)\max\left(S(T)-K,0\right)$$

$$\text{Payoff}_{\text{Quantoput}}=\max\left(KQ(T)-S(T)Q(T),0\right)=Q(T)\max\left(K-S(T),0\right) \qquad (33)$$

Prima opţiunii call la momentul $t<T$ va fi:

$$\text{Quantocall}(t,S,Q)=Q\left(SN(d_1)-Ke^{-r_f(T-t)}N(d_2)\right) \qquad (34)$$

unde:

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+\left(r_f+\frac{\sigma_S{}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}} \qquad d_2=d_1-\sigma_S\sqrt{T-t}$$

Deci în cazul în care prețul de exercițiu este fixat în JPY (şi deci este variabil în USD) prima call pe piața americană va fi egală cu prima call de pe piața japoneză (rata dobînzii din Japonia este r_f) transformată în USD.

Demonstrație

Se observă că putem scrie payoff-ul opțiunii call astfel:

$$Q\max(S-K,0)=QH(T,S) \quad \text{unde} \quad H(T,S):=\max(S-K,0)$$

Datorită formei payoff-ului vom căuta o soluție a ecuației de evaluare (31) de forma:

$$D(t,S,Q)=QH(t,S)$$

Vom căuta să obținem o ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru $H(t,S)$. Avem că:

$$\frac{\partial D}{\partial t}=Q\frac{\partial H}{\partial t};\frac{\partial D}{\partial S}=Q\frac{\partial H}{\partial S};\frac{\partial D}{\partial Q}=H;\frac{\partial^2 D}{\partial S^2}=Q\frac{\partial^2 H}{\partial S^2};\frac{\partial^2 D}{\partial Q^2}=0;\frac{\partial^2 D}{\partial S\partial Q}=\frac{\partial H}{\partial S}$$

Inlocuind in ecuația (31) derivatele parțiale de mai sus obținem următoarea ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru $H(t,S)$:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+r_f S\frac{\partial H}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=r_f H$$

cu condiția pe frontireră $H(T,S):=\max(S-K,0)$.

Dar această ecuație este chiar ecuația Black-Scholes pentru un call pe indicele Nikkei evaluat pe piată japoneză (rata dobînzii din Japonia fiind r_f)

Exercițiu

Să se deducă o relație de paritate între opțiunile quanto de tip cll şi de tip put cu prețul de exercițiu fixat în JPY.

2) Opțiuni quanto cu pretul de exercițiu (K) fixat în USD

Payoff-ul în SUA va fi:

$$\text{Payoff}_{\text{Quantocall}}=\max(S(T)Q(T)-K,0)$$
$$\text{Payoff}_{\text{Quantoput}}=\max(K-S(T)Q(T),0) \qquad (35)$$

Prima opțiunii call la momentul $t<T$ va fi:

$$\text{Quantocall}(t,S,Q)=SQN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (36)$$

unde:

$$d_1=\frac{\ln(SQ/K)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t} \qquad \sigma^2=\sigma_S^2+\sigma_Q^2+2\rho\sigma_S\sigma_Q$$

Demonstrație

Se observă că putem scrie payoff-ul opțiunii call astfel:

$$\max\left(SQ - K, 0\right) = H\left(T, SQ\right) \text{ unde } H\left(T, x\right) := \max\left(x - K, 0\right)$$

Datorită formei payoff-ului vom căuta o soluție a ecuației de evaluare (31) de forma:

$$D\left(t, S, Q\right) = H\left(t, SQ\right)$$

Facem schimbarea de variabilă $x = SQ$. Vom căuta să obținem o ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru. Avem că:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t};\ \frac{\partial D}{\partial S} = Q\frac{\partial H}{\partial x};\ \frac{\partial D}{\partial Q} = S\frac{\partial H}{\partial x};\ \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = Q^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 D}{\partial Q^2} = S^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 D}{\partial S\partial Q} = SQ\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial x}$$

Inlocuind in ecuația (31) derivatele parțiale de mai sus şi folosind schimbarea de variabilă obținem următoarea ecuație diferențială cu derivate parțiale pentru $H\left(t, x\right)$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + r\,x\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = r\,H$$

cu condiția pe frontireră $H\left(T, x\right) := \max\left(x - K, 0\right)$.

Deci

$$H\left(t, x\right) = xN\left(d_1\right) - Ke^{-r\left(T - t\right)}N\left(d_2\right)$$

Exercițiu

Să se deducă o relație de paritate între opțiunile quanto de tip call şi de tip put cu prețul de exercițiu fixat în USD.