ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE

Modelul ISLM Dinamic

- NOTE DE CURS-

Prof. univ. dr. Moisă Altăr

Bucureşti, decembrie 2002

1. MODELUL

Vom presupune că funcțiile IS si LM sunt de tip Cobb-Douglas:

IS: $$Y = A \cdot Y^{C} \cdot e^{-gr} \tag{1}$$

LM: $$\frac{M}{P} = Y^{l_1} \cdot e^{-l_2(r+\pi^e)} \tag{2}$$

Notațiile sunt următoarele:

Y – mărimea PIB-ului;

M – oferta nominala de moneda;

P – indicele preturilor;

r – rata reala a dobânzii;

π^e – mărimea anticipata a inflației;

A, c, g, l_1, l_2 – parametri.

Logaritmând ecuațiile (1) si (2) se obține:

$$y = a + cy - gr \tag{3}$$
$$m = l_1 y - l_2\left(r + \pi^e\right) \tag{4}$$

Au fost folosite următoarele notații:

$$y = \ln Y; \quad m = \ln\frac{M}{P}; \quad a = \ln A \tag{5}$$

Coordonatele punctului de echilibru sunt:

$$\begin{cases} y^* = \dfrac{1}{1 - c + \dfrac{g}{l_2} l_1}\left(a + \dfrac{g}{l_2} m + g\pi^e\right) \\ r^* = \dfrac{1}{l_2}\left(l_1 y^* - m - l_2 \pi^e\right) \end{cases} \tag{6}$$

Vom nota cu k multiplicatorul:

$$k = \frac{1}{1 - c + \dfrac{g}{l_2} l_1} \tag{7}$$

Cu aceasta notație, prima relație din (6) devine:

$$y^* = k\left(a + \frac{g}{l_2}m + g\pi^e\right) \tag{8}$$

Relația (8) evidențiază faptul ca mărimea PIB-ului (in logaritm) depinde de oferta de moneda (m), de anticiparea inflaționista (π^e), precum si de coeficientul a care reflecta politica fiscala si nivelul exportului net.

Vom presupune ca oferta de moneda pe care o face Banca Centrala este guvernata de o <u>regula de politica monetara</u> de tip Friedman.

$$M_{t+1} = M_t \cdot e^{\mu} \quad ; \qquad \mu = \text{constant} \tag{9}$$

respectiv:

$$\ln\left(\frac{M_{t+1}}{M_t}\right) = \mu \tag{10}$$

Vom presupune ca oferta agregata (AS) este modelata de următoarea funcție de tip <u>Phillips-Lucas</u>:

$$y_t = \bar{y} + \frac{1}{\theta}\left(\pi_t - \pi_t^e\right) \tag{11}$$

unde $\bar{y}$ reprezintă mărimea „naturala” a PIB-ului (in logaritm), iar π_t – mărimea inflației. Coeficientul θ este dat.

Din (11) rezulta:

$$\pi_t = \pi_t^e + \theta\left(y_t - \bar{y}\right) \tag{12}$$

In ceea ce priveşte inflația π_t, avem relația de definiție:

$$P_{t+1} = P_t \cdot e^{\pi_t} \tag{13}$$

respectiv:

$$\pi_t = \ln\frac{P_{t+1}}{P_t} \tag{14}$$

Privitor la mecanismul de anticipare a inflației de către agenții economici, vom presupune ca acesta este de <u>tip adaptiv</u> (Friedman-Cagan):

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t^e + \delta\left(\pi_t - \pi_t^e\right); \qquad 0 \le \delta \le 1 \tag{15}$$

Parametrul de „invatare” δ este dat.

Utilizând relația (12), relația (15) devine:

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t^e + \delta\theta\left(y_t - \bar{y}\right) \tag{16}$$

Utilizând relația (8):

$$y_t = y_t{*} = k\left(a + \frac{g}{l_2}m_t + g\pi_t^e\right) \tag{8'}$$

ecuația de dinamica (16) pentru inflația anticipata devine:

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t^e + \delta\theta\left[k\left(a + \frac{g}{l_2}m_t + g\pi_t^e\right) - \bar{y}\right],$$

respectiv:

$$\pi_{t+1}^e = \delta\theta k\frac{g}{l_2}m_t + \left(1 + \delta\theta kg\right)\pi_t^e + \delta\theta\left(ka - \bar{y}\right) \tag{17}$$

Vom nota:

$$\alpha = \theta k\frac{g}{l_2}; \qquad \theta\left(ka - \bar{y}\right) = h \tag{18}$$

In acest caz, relația de dinamica (17) devine:

$$\pi_{t+1}^e = \delta\alpha m_t + \left(1 + \delta\alpha l_2\right)\pi_t^e + \delta h \tag{19}$$

In ceea ce priveşte oferta de moneda, avem:

$$m_{t+1} - m_t = \ln\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}} - \ln\frac{M_t}{P_t} = \ln\frac{M_{t+1}}{M_t} - \ln\frac{P_{t+1}}{P_t}$$

Utilizând regula de politica monetara (10), precum si relația de definiție a inflației (14), rezulta:

$$m_{t+1} - m_t = \mu - \pi_t$$

sau

$$m_{t+1} = m_t - \pi_t + \mu \tag{20}$$

Utilizând relațiile (12) si (8') rezultă:

$$m_{t+1} = m_t - \pi_t^e - \theta\left[k\left(a + \frac{g}{l_2}m_t + g\pi_t^e\right) - \bar{y}\right] + \mu$$

sau

$$m_{t+1} = \left(1 - \theta k\frac{g}{l_2}\right)m_t - \left(1 + \theta kg\right)\pi_t^e + \mu - \theta\left(ka - \bar{y}\right)$$

Utilizând notațiile (18) obținem:

$$m_{t+1} = (1-\alpha)m_t - (1+\alpha l_2)\pi_t^e + \mu - h \qquad (21)$$

Dinamica sistemului (modelul IS-LM dinamic), in varianta propusa pe baza ipotezelor adoptate este data de relațiile (21) si (19):

$$\begin{cases} m_{t+1} = (1-\alpha)m_t - (1+\alpha l_2)\pi_t^e + \mu - h \\ \pi_{t+1}^e = \delta\alpha m_t + (1+\delta\alpha l_2)\pi_t^e + \delta h \end{cases} \qquad (22)$$

2. ANALIZA DINAMICII

In vederea analizei dinamicii (22), vor fi calculate traiectoriile staționare:

$$\begin{aligned} & m_{t+1} = m_t = m = constanta & \forall t \in N \\ & \pi_{t+1}^e = \pi_t^e = \pi^e = constanta & \forall t \in N \end{aligned} \qquad (23)$$

precum si punctul de echilibru (steady state) ($\hat{m},\ \hat{\pi}^e$).

Utilizând relația (23), din (22) se obține:

$$\begin{aligned} & m = -\frac{1+\alpha l_2}{\alpha}\pi^e + \frac{1}{\alpha}(\mu - h) & (m_{t+1} = m_t = m) \\ & m = -l_2\pi^e - \frac{1}{\alpha}h & (\pi_{t+1}^e = \pi_t^e = \pi^e) \end{aligned} \qquad (24)$$

Punctul de echilibru (steady state) rezultat ca soluție a sistemului format din ecuațiile (23) si (24) este:

$$\begin{cases} \hat{\pi}^e = \mu \\ \hat{m} = -l_2\mu - \frac{1}{\alpha}h \end{cases} \qquad (25)$$

Tinand seama de relațiile (18) rezulta:

$$\begin{cases} \hat{\pi}^e = \mu \\ \hat{m} = \frac{l_2}{g}\left(\frac{1}{k}\bar{y} - a - g\mu\right) \end{cases} \qquad (26)$$

Utilizând relațiile (26), din (8) rezulta nivelul de echilibru pentru PIB:

$$\hat{y}^* = \bar{y} \tag{27}$$

Relația (27) evidentiaza faptul ca la echilibru valoarea PIB va coincide cu valoarea sa de echilibru.

De asemenea, prima relație din (26) arata ca la echilibru inflația anticipata va fi egala cu ritmul de creştere a ofertei de moneda.

Pentru a verifica stabilitatea sistemului dinamic IS-LM, vom trece la soluționarea sistemului de ecuații (22). Acesta este un sistem de ecuații cu diferente finite liniar si neomogene.

Tinand seama de expresiile (25), se verifica prin calcul ca sistemul (22) se mai poate scrie astfel:

$$\begin{aligned} m_{t+1} - \hat{m} &= (1-\alpha)(m_t - \hat{m}) - (1 + \alpha l_2)(\pi_t - \hat{\pi}) \\ \pi_{t+1}^e - \hat{\pi} &= \delta\alpha(m_t - \hat{m}) + (1 + \delta\alpha l_2)(\pi_t - \hat{\pi}) \end{aligned} \tag{22'}$$

Vom nota:

$$\begin{aligned} m_t - \hat{m} &= u_t \\ \pi_t^e - \hat{\pi}^e &= z_t \end{aligned} \tag{28}$$

Variabilele u_t, respectiv z_t, reprezintă abaterile variabilelor respective fata de valorile de echilibru.

Cu notațiile (28), sistemul (22') se scrie:

$$\begin{cases} u_{t+1} = (1-\alpha)u_t - (1 + \alpha l_2)z_t \\ z_{t+1} = \delta\alpha u_t + (1 + \delta\alpha l_2)z_t \end{cases} \tag{29}$$

Sistemul de ecuații cu diferente (29) are avantajul ca este omogen.

Pentru scrierea matriciala a sistemului (29) vom nota:

$$X_t = \begin{pmatrix} u_t \\ z_t \end{pmatrix}; \qquad M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -(1+\alpha l_2) \\ \delta\alpha & 1 + \delta\alpha l_2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Cu aceste notații, sistemul (29) se scrie:

$$X_{t+1} = MX_t \tag{31}$$

Din (31) se obține succesiv:

$$X_1 = MX_0; \qquad X_2 = MX_1 = M^2 X_0; \qquad \ldots \qquad ; \quad X_n = M^n X_0$$

Deci soluția generala a ecuației (31) este:

$$X_t = M^t X_0 \qquad (32)$$

Pentru a scrie mai convenabil soluția (30), vom reprezenta matricea M sub forma Jordan:

$$M = K\Lambda K^{-1} \qquad (33)$$

unde Λ este matrice diagonala:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (34)$$

λ_1, λ_2 fiind valorile proprii ale matricii M, iar K este matricea ce are pe coloane vectorii proprii ale matricii M.

Ecuatia caracteritica matricii M este:

$$\det\left(M - \lambda I_2\right) = 0 \qquad (35)$$

repectiv:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & -\left(1+\alpha l_2\right) \\ \delta\alpha & 1+\delta\alpha l_2 \end{vmatrix} = 0$$

dezvoltand determinantul se obtine:

$$\lambda^2 - \left(1-\alpha+1-\delta\alpha l_2\right)\lambda + \delta\alpha(1+\alpha l_2) + (1-\alpha)(1+\delta\alpha l_2) = 0$$

repectiv:

$$\lambda^2 - (2-\alpha+\delta\alpha l_2)\lambda + 1-\alpha+\delta\alpha+\delta\alpha l_2 = 0 \qquad (36)$$

Inlocuind solutiile λ_1 si λ_2 ale ecuatiei (36) si tinand seama de (33), solutia (32) a sistemului (31) devine:

$$X_t = \left[K\Lambda K^{-1}\right]^t X_0 \qquad (37)$$

se verifica usor ca:

$$\left[K\Lambda K^{-1}\right]^t = K\Lambda^t K^{-1}$$

De fapt, relatia de mai sus reprezinta unul dintre avantajele descompunerii JORDAN al unei matrici:

Tinand seama ca:

$$\Lambda^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix}$$

solutia (37) devine:

$$X_t = K\begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix}K^{-1}X_0 \tag{38}$$

In sfarsit, vom nota:

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \pi_t^e \end{pmatrix} = \psi_t \tag{39}$$

Tinand seama de (28) si prima relatie din (30), rezulta:

$$\psi_t = \hat{\psi}_0 + X_t \tag{40}$$

Evident ca solutia de echilibru este:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\pi}^e \end{pmatrix} \tag{41}$$

Tinand seama de (38), soluția (40) se poate scrie:

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \pi_t^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\pi}^e \end{pmatrix} + K\begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix}K^{-1}X_0$$

sau

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \pi_t^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\pi}^e \end{pmatrix} + K\begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_t^t \end{bmatrix}K^{-1}\begin{pmatrix} m_0 \\ \pi_0^e \end{pmatrix} \tag{42}$$

Sistemul dinamic IS-LM va fi stabil daca si numai daca este indeplinita conditia:

$$|\lambda_1| < 1 \text{ si } |\lambda_2| < 1 \tag{43}$$

In acest caz vom avea:

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \pi_t^e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{\pi}^e \end{pmatrix}$$

Ramane de verificat daca solutiile ecuatiei de gradul doi (36) verifica conditia (43).

Discriminantul ecuatiei (36) este:

$$\Delta = \alpha[(\alpha - 4\delta) + \delta\alpha l_2(\delta l_2 - 2)]$$

daca $\delta > \frac{1}{4}\alpha$, discriminantul va fi negativ si deci λ_1, λ_2 vor fi complex-conjugate.

In acest caz avem:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{1 - \alpha + \delta\alpha + \delta\alpha l_2}$$

$$|\lambda_1| < 1 \text{ daca } \delta < \frac{1}{1 + l_2}$$

<u>In concluzie</u>, rezulta ca si abilitatea modelului IS-LM dinamic depinde in mod hotarator de parametrul de „invatare” δ care caracterizeaza modul in care agentii economici anticipeaza inflatia (relatia 15).

In cazul in care este indeplinita conditia :

$$\frac{1}{4}\alpha < \delta < \frac{1}{1 + l_2}, \tag{44}$$

respectiv:

$$\frac{1}{4}\theta k \frac{g}{l_2} < \delta < \frac{1}{1 + l_2} \tag{44'}$$

sistemul IS-LM dinamic este stabil.

Relatia (44’) se mai scrie:

$$\frac{1}{4} \cdot \theta \cdot \frac{\frac{g}{l_2}}{1 - c + \frac{g}{l_2} \cdot l_1} < \delta < \frac{1}{1 + l_2} \tag{44''}$$

Trebuie subliniat faptul ca relatiile(44) reprezinta conditii suficiente de stabilitate, dar nu si necesare.

3. ANALIZA TRAIECTORILOR IN PLANUL FAZELOR

Pentru a putea surprinde grafic dinamica sistemului, vom reprezenta in planul fazelor (π^e, m) traiectorile stationare (23) si (24)

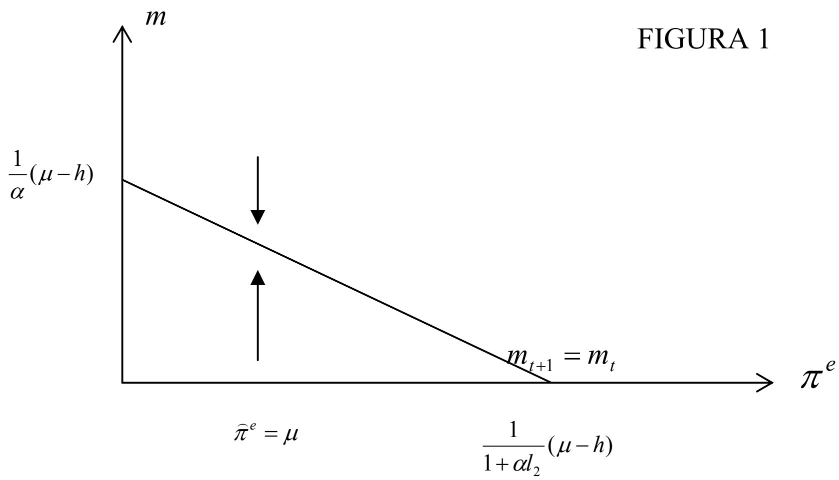
Traiectoria stationara pentru o serie reala de moneda este:

$$m_{t+1} = m_t = m \qquad \forall t \in N \text{, respectiv}$$

$$m_t = -\left(\frac{1}{\alpha} + l_2\right)\pi^e + \frac{1}{\alpha}(\mu - h) \tag{23'}$$

Graficul dreptei (23') este reprezentat in figura 1

FIGURA 1



Dreapta $m_{t+1} = m_t$ din figura 1 împarte planul in doua semiplane. Pentru punctele de coordonate π^e, m din unul dintre semiplane vom avea $m_{t+1} > m_t$, iar pentru punctele din celalalt semiplan vom avea $m_{t+1} < m_t$.

Pentru a identifica sensul miscarii in fiecare dintre cele doua semiplane, prima ecuație din (22) va fi scrisa astfel:

$$m_{t+1} - m_t = -\alpha\left[m_t + \frac{1+\alpha l_2}{\alpha}\pi_t^e - \frac{1}{\alpha}(\mu - h)\right]$$

din relatia de mai sus se observa ca in cazul in care avem:

$$m_t > -\frac{1+\alpha l_2}{\alpha}\pi^e + \frac{1}{\alpha}(\mu - h),$$

atunci:

$$m_{t+1} - m_t < 0.$$

Rezulta ca sensul miscarii in cele doua semiplane este dat de sagetile din figura 1. In mod asemanator, vom considera dreapta $\pi^e_{t+1} = \pi^e_t$, *respectiv*:

$$\text{m}=-l_2\pi^e - \frac{1}{\alpha}h \qquad (24')$$

In figura 2 se prezinta graficul traiectoriei stationare (24'), precum si sensul miscarii in cele doua semiplane determinate

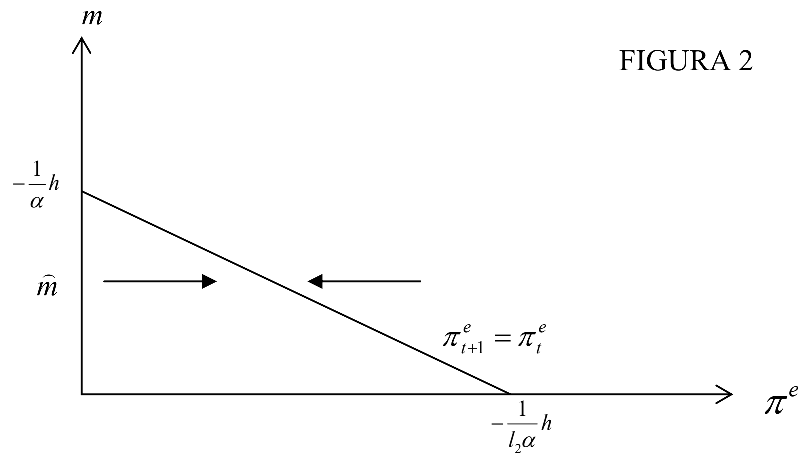


FIGURA 2

Sensul miscarii prezentat in figura 2 rezulta cu claritate din a doua ecuatie (22), pe care o vom scrie astfel:

$$\pi^e_{t+1} - \pi^e_t = \delta\alpha\left(m_t + l_2\pi^e_t + \frac{1}{\alpha}h\right)$$

Reprezentand ambele traiectorii stationare in acelasi sistem de axe de coordonate, spatiul fazelor va fi impartit in patru cadrane.

Sensul miscarii în fiecare dintre cele patru cadrane este prezentat in figura 3.

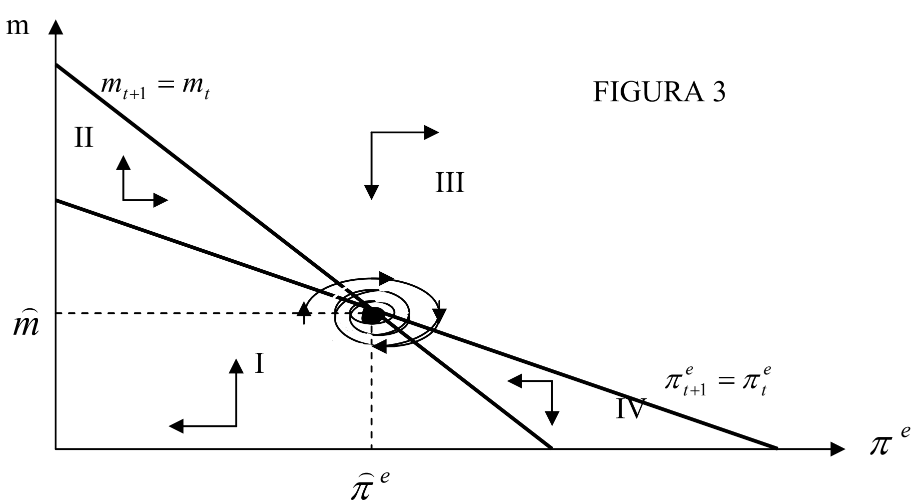


FIGURA 3