Subiecte examen la disciplina Inginerie Financiară

– sesiunea iulie 2002 –

1. Valoarea activelor unei firme este A=1200, volatilitatea $\sigma = 40\%$ iar rata dobânzii pe piață este de $r = 9\%$.

   O bancă acordă firmei două credite, primul senior, iar al doilea junior, sub formă de obligațiuni zero-cupon cu scadență T=4 ani. Valorile nominale sunt: $F_s = 800$ şi $F_j = 100$.

   a) Să se calculeze primele de risc aplicate pentru cele două credite.
   b) Să se calculeze valorile celor două credite cu şase luni înainte de scadență.

2. Rata dobânzii este de $r = 12\%$. Un investitor dispune de 15.000.000 um şi îşi propune ca peste 2 ani capitalul său să fie de cel puțin 16.912.452 um. Suma de care dispune poate fi investită fie în unități de portofoliu diversificat, fie depusă în conturi bancare. Valoarea unei unități de portofoliu este 2500 um iar riscul său este de $\sigma = 14\%$.

   Să se calculeze suma ce va fi depusă în conturi bancare, precum şi numărul de unități de portofoliu diversificat ce vor fi achiziționate de investitor astfel încât să-şi asigure scopul propus.

3. Pentru o acțiune se cunosc următoarele date: $S_0 = 80$, $\sigma = 35\%$. Rata dobânzii este de $r = 10\%$ şi ea coincide cu media rentabilității acțiunii.

   a) Să se calculeze intervalul în care se poate afla cursul acțiunii după o perioadă de 6 luni cu o probabilitate de 95%.
   b) Un investitor îşi formează un portofoliu format dintr-o opțiune CALL având ca suport acțiunea, T=6 luni, prețul de exercițiu fiind $E_c = 80$ şi o opțiune PUT cu prețul de exercițiu $E_p = 77$ şi T=6 luni (ambele opțiuni sunt poziție long). Să se precizeze costul investiției, indicatorul Δ al portofoliului, precum şi funcția de payoff.
   c) Să se precizeze câştigul net al investitorului pentru cazul în care S_T se află la unul din capetele intervalului calculat la punctul a).

4. Se consideră o obligațiune zero cupon, având valoarea nominală F=1 şi scadența T.

   Să se scrie ecuația diferențială care modelează dinamica prețului P al obligațiunii ştiind că rata dobânzii descrie următoarea ecuație:
   $dr = \alpha \cdot (\beta - r) \cdot dt + r \cdot \sigma \cdot dz$, $\alpha > 0, \beta > 0$ iar dz este un proces Wiener.

5. Se consideră formula BLACK-SCHOLES pentru o opțiune CALL, activul suport având rata instantanee a dividendului egală cu q.

   Se notează cu: $h = \dfrac{E}{S}$.

   Să se calculeze formula $\dfrac{\partial C}{\partial h}$ care măsoară senzitivitatea costului opțiunii CALL în raport cu h. Să se interpreteze economic formula dedusă.

Soluții

Subiectul 1

Valoarea creditului senior se calculează pe baza formulei (6.12) din notele de curs aflate pe website.
Avem:
$D_{0,S} = F \cdot e^{-r \times T} - P(0, A_0)$
unde valoarea putului este:
$P(0, A_0) = F \cdot e^{-r \times T} \cdot N(-d_2) - A_0 \cdot N(-d_1)$
Pe baza elementelor date în problemă rezultă:
$F \cdot e^{-r \times T} = 558{,}14$
$P(0, A_0) = 56{,}30$
Rezultă că $D_{0,S} = 501{,}94$
Rata dobânzii aplicată pentru creditul senior rezultă din relația:

$$800 \cdot e^{-r_{1,S} \times T} = 501{,}94$$

de unde $r_{1,S} = 11{,}65\%$
Prima de risc aplicată pentru creditul senior este:
$\Pi_S = r_1 - r = 11{,}65\% - 9\% = 2{,}65\%$
Valoarea creditului junior este dată de formula (6.35) din notele de curs:
$D_{0,J} = C(0{,}800) - C(0{,}800 + 100)$
Avem:
$C(0{,}800) = 698{,}16$; $C(0{,}900) = 650{,}38$
Rezultă
$D_{0,J} = 47{,}78$
Rata dobânzii aplicată pentru creditul junior este:
$r_{1,J} = \dfrac{\ln 100 - \ln 47{,}38}{4} = 18{,}46\%$

Rezultă că prima de risc aplicată pentru creditul junior este de:
18,46% - 9%=9,46%

Subiectul 2

În cazul în care investitorul depune întreaga sumă la bancă, după doi ani el va dispune de 19.068.737 um.

În speranța unui câştig mai mare, investitorul doreşte să investească o parte din sumă în acțiuni cu risc. Pentru a-şi proteja investiția, el va cumpăra puturi protective. Scopul investitorului este de a-şi asigura o rentabilitate a investiției de cel puțin 6% (față de 12%, cât asigură depunerea la bancă), astfel încât la sfârşitul celor doi ani capitalul său să fie de cel puțin 16.912.452 um.

În dorința de a câştiga cât mai mult, investitorul va achiziționa un număr de unități de portofoliu diversificat, valoarea unitară al acestuia fiind de 2500 um. Pentru a-şi asigura câştigul minim stabilit, investitorul va cumpăra pentru fiecare unitate de portofoliu achiziționtă şi un protective put cu prețul de exercițiu E=2818,74 um ($2500 \cdot e^{0,06\times 2} = 2818,74$).

Aplicând formula BLACK-SCHOLES, rezultă că prețul unui put protectiv va fi egal cu 77,64 um.

Valoarea unui pachet format dintr-o unitate de portofoliu diversificată şi un protective put va fi de Π+P=2577,64

Formula (5.69) de la pagina 73 din notele de curs va da mărimea sumei ce urmează a fi depusă la bancă. Înlocuind în formula (5.69)

$A_T = 16912452$, $E = 2818,74$, $W = 15000000$ se obține:

$$B = \frac{2577,64 * 16912452 - 2818,74 * 15000000}{2577,64 * e^{0,1*2} - 2818,74} = 2866541$$

Suma de mai sus va fi depusă într-un cont bancar. Suma ce va fi investită în pachete formate din unitățile de portofoliu şi puturi protective va fi:

15000000-2866541=12133458

Cu această sumă, investitorul va cumpăra un număr de:

$$x = \frac{12133458}{2577,64} = 4707,20$$

unități de portofoliu însoțite de puturile corespunzătoare.

Subiectul 3

a) Conform celor prezentate în notele de curs, avem relația (3.57), care se poate scrie şi astfel:

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T - \alpha \cdot \sigma\sqrt{T} \le \ln\frac{S_T}{S_0} \le \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \alpha \cdot \sigma\sqrt{T} \qquad (*)$$

Valoarea lui alfa este dată de:

$2N(\alpha) - 1 = 0.95 \Rightarrow N(\alpha) = 0.975$

Din tabelele privind probabilitatea cumulată rezultă:

$\alpha = 1.96$

Înlocuind pe alfa şi elementele date în problemă în formula (*) se obține:

$$-0.4657 \le \ln\frac{S_T}{S_0} \le 0.50445$$

$$0.6277 \le \frac{S_T}{S_0} \le 1.6507$$

$$50.21 \le S_T \le 132.48$$

Rezultă că peste 6 luni cursul acțiunii se va afla în intervalul $(50.21; 132.48)$ cu o probabilitate de 95%.

b) Aplicând formula Black-Scholes rezultă:

C=9.935 P=5.010

Δc=0.6048 Δp=-0.3093

Costul investiției este:

C+P=14.945

Iar indicatorul Δ al portofoliului este Δπ= Δc+ Δp=2.2955

Funcția de payoff este:

$$F = \begin{cases} 77 - S & daca \quad S \le 77 \\ 0 & daca \quad 77 < S < 82 \\ S - 82 & daca \quad S \ge 82 \end{cases}$$

câştigul net al investitorului este:

1. dacă S=132.48:
câştig net :132.48-82-14.945=35.535
2. dacă S=50.21:
câştig net :77-50.21-14.945=11.845

Subiectul 4

Avem:

$P = 1 * e^{-r(T-t)}$

Întrucât P=P(t,r), conform lemei lui Ito avem:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} \cdot a(t,r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \cdot b(t,r) \right) dr + \frac{\partial P}{\partial r} \cdot b(t,r) \cdot dz$$

unde s-a notat cu:

$a(t,r) = \alpha \cdot (\beta - r)$

$b(t,r) = r \cdot \sigma$

Avem:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r \cdot e^{-r(T-t)} = rP$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -(T-t) \cdot e^{-r(T-t)} = -(T-t)P$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = (t-r)^2 \cdot e^{-t(T-t)} = (T-t)^2 P$$

Înlocuind obținem:

$$dP = \left(r - (t-t)\alpha(\beta - r) + \frac{1}{2}(T-t)^2 r^2 \sigma^2 \right) P \cdot dt - (T-t) r \sigma P \cdot dz$$

Subiectul 5

Conform formulei Black – Scholes avem:

$$C = e^{-q(t-t)} \cdot S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Notăm:

$$h = \frac{E}{S}$$

Rezultă:

$$\frac{\partial h}{\partial E} = \frac{1}{S}; \ \frac{\partial h}{\partial S} = -\frac{E}{S^2} = -h\frac{1}{S}$$

Derivând funcția C în raport cu h avem:

$$\frac{\partial C}{\partial h} = e^{-q(T-t)} N(d_1) \frac{\partial S}{\partial h} - e^{-r(T-t)} N(d_2) \frac{\partial E}{\partial h} + \left[e^{-q(T-t)} S \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial h} - e^{-r(T-t)} E \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial h} \right]$$

Ținând seama de expresia lui d1 şi d2 rezultă că

$$\frac{\partial d_1}{\partial h} = \frac{\partial d_2}{\partial h}$$

Ceea ce va arăta că expresia din paranteza dreaptă este nulă (vezi notele de curs de pe website). Rezultă:

$$\frac{\partial C}{\partial h} = e^{-q(T-t)} N(d_1) \frac{\partial S}{\partial h} - e^{-r(T-t)} N(d_2) \frac{\partial E}{\partial h}$$

deci

$$\frac{\partial C}{\partial h} = e^{-q(T-t)} N(d_1) \left(-S\frac{1}{h} \right) - e^{-r(T-t)} N(d_2) S = -S\left(\Delta \cdot \frac{1}{h} + \nabla \right)$$

unde expresiile pentru Delta şi Nabla sunt cele cunoscute (vezi cursul de Inginerie Financiară de pe site-ul DOFIN).