Subiecte examen la disciplina Inginerie Financiară

– sesiunea iunie 2002 –

1. O firmă din Aliteria, în care moneda națională este ~~A~~, are de făcut peste 1 an plăți în valoare totală de 7,9 milioane ~~A~~. În acest scop ea va primi 1 milion USD şi 1 milion EUR. Cursurile de schimb, în prezent sunt: 4~~A~~=1USD; 3,7~~A~~ = 1 EUR.

Volatilitățile cursului de schimb sunt:

~~A~~/USD: $\sigma_1 = 15\%$; ~~A~~/EUR: $\sigma_2 = 20\%$; EUR/USD: $\sigma_3 = 10\%$.

Ratele dobânzilor sunt: zona EURO:

$r_2 = 8{,}0\%$; SUA: $r_1 = 6{,}0\%$; Aliteria: $r_3 = 10{,}0\%$.

   a) Să se prezinte o schemă de hedging utilizând opțiuni care să asigure cel puțin 7,9 milioane ~~A~~ şi care să aibă un cost cât mai redus. Se va preciza tipul de opțiuni utilizat, prețurile de exercițiu, precum şi faptul dacă s-au utilizat scheme de tip „cross”.
   b) Să se prezinte şi o schemă utilizând contracte forward.

2. Pentru acțiunile firmei S&M se cunosc următoarele elemente: $S = 87$; $\sigma = 28\%$. Se ştie că $r = 10\%$, iar $q = 0$. Pentru o opțiune de tip call european, având ca suport această acțiune, şi scadența peste 9 luni se cunosc următorii indicatori:

$\Delta = 0{,}6199$; $\Gamma = 0{,}016846$; $\Theta = -10{,}04486$

   a) Să se calculeze valoarea opțiunii call;
   b) Să se calculeze valoarea opțiunii put având acelaşi preț de exercițiu şi aceeaşi scadență.

3. Valoarea activelor unei firme este $A = 1200$, iar volatilitatea 30%. Rata dobânzii este $r = 9\%$. O bancă acordă firmei un credit, sub formă de

obligațiune zero-cupon, având valoarea nominală $F = 800$ şi scadența $T = 3$ ani.

a) Să se calculeze valoarea inițială a debitului D_0, precum şi prima de risc aplicată.

b) După un an banca constată că activele firmei au crescut numai cu 5%, iar riscul a crescut la 32%. În acelaşi timp, rata dobânzii a crescut la 10%. În aceste condiții banca hotărăşte să vândă creditul, iar suma obținută o investeşte integral pentru timpul rămas într-o obligațiune zero-cupon emisă de o firmă a cărei valoare a activelor este $A = 1000$. În acest mod, la scadență banca va încasa o sumă cu 6,25% mai mare decât dacă ar fi păstrat prima obligațiune.

Să se calculeze:

a) Riscul σ al celei de a doua firme;

b) Prima de risc aplicată acesteia.

4. Se ştie că prețul valutei din țara A exprimat în funcție de prețul valutei din țara B este:

$$\frac{dS}{S} = (r_B - r_A)dt + \sigma \cdot dz$$

unde r_A şi r_B reprezintă rata dobânzii din cele două țări.

Aplicând lema lui Ito să se deducă ecuația prețului valutei din țara B, funcție de prețul valutei din țara A. Explicații!

5. Un investitor emite 100000 de opțiuni call cu următoarele caracteristici: $S = 80$; $E = 80$; $\sigma = 30\%$; $r = 10\%$; $q = 0$; $T = 6$ luni. Pentru a face o operație de hedging static, el cumpără 100000 acțiuni, utilizând bani împrumutați.

a) Să se precizeze profitul net maxim ce se poate obține prin această schemă de hedging. Să se precizeze în ce condiții operatorul este perfect acoperit.

b) Să se calculeze, cu o probabilitate de 99% pierderea maximă pe care poate să o aibă operatorul.

Soluții

Subiectul 1

a) Pentru ca firma să dispună peste un an de cele 7,9₳ ea trebuie să ia poziție long pe două opțiuni put de tip european pe valută, cu scadența de un an. Schemele posibile sunt:

   a. USD $\rightarrow$ ₳ şi EUR $\rightarrow$ ₳
   b. EUR $\rightarrow$ USD şi USD $\rightarrow$ ₳
   c. USD $\rightarrow$ EUR şi EUR $\rightarrow$ ₳

Pentru fiecare variantă trebuie stabilite prețurile de exercițiu cele mai convenabile, astfel încât în costul operației de hedging să fie cât mai redus.

De exemplu, în schema a), avem următoarea variantă:

$P_{USD,A}(4{,}1) + P_{EUR,A}(3{,}8)$

În paranteză s-au trecut prețurile de exercițiu stabilite, respectiv de 4,1 pentru dolar şi de 3,8 pentru euro.

Aplicând formula lui Black–Scholes, rezultă următoarele costuri pentru cele două opțiuni put:

$P_{USD,A}(4{,}1) = 0{,}1960520$; $P_{EUR,A}(3{,}8) = 0{,}2845539$

Costul acestei scheme este:

$1000000(0{,}1960520 + 0{,}2845534) = 480605{,}9$ ₳

Indicatorii NABLA pentru cele două tipuri de opțiuni sunt:

$\nabla_1 = 0{,}442655$; $\nabla_2 = 0{,}5004097$

O altă schemă, tot în varianta a), ar fi:

$$1000000\left(P_{USD,A}(4{,}2) + P_{EUR,A}(3{,}7)\right) = 1000000(0{,}2432261 + 0{,}2368978) = 480123{,}9 \text{ ₳}$$

Se observă că valoarea operației de hedging s-a redus, dar nu sensibil.

Valorile indicatorilor NABLA sunt:

$\nabla_1 = 0{,}5005$; $\nabla_2 = 0{,}4524$

Se observă că raportul dintre aceşti indicatori s-a modificat față de cazul precedent, ceea ce indică faptul că s-a depăşit punctul „optim”. Într-adevăr, calculând valoarea schemei de hedging pentru cazul în care prețurile de exercițiu ale celor două opțiuni put sunt $E_1 = 4{,}15$ şi respectiv $E_2 = 3{,}75$ se obține:

$P_{USD,A}(4{,}15) = 0{,}2189161$; $P_{EUR,A}(3{,}75) = 0{,}260126$

Costul operației de hedging este în acest caz de 479042, iar valorile indicatorilor NABLA sunt:

$\nabla_1 = 0{,}47181$; $\nabla_2 = 0{,}476627$

Aceasta indică că suntem în jurul punctului de „optim", ceea ce ne face să considerăm că varianta de mai sus este cea acceptabilă.

În ceea ce priveşte variantele b) şi c), acestea vor conduce la costuri mai mari deoarece sumele transformate din EURO în USD, respectiv din USD în EURO, vor implica costuri suplimentare.

Într-adevăr, dacă transformăm suma din EURO întâi în USD, pe baza unei opțiuni put, costul acesteia va fi:

$P_{EUR,USD}(0{,}925) = 0{,}0437044$

S-a considerat opțiunea put „at the money", întrucât cursul actual EUR/USD este de $3{,}7/4 = 0{,}925$.

Prima opțiunii fiind exprimată în USD, transformat în ₳ acesta va fi:

$4 \times 0{,}0437044 = 0{,}1748176$

În ceea ce priveşte prețul de exercițiu al opțiunii USD→₳, acesta trebuie să fie de 4,103896 pentru a asigura transformarea celor 1,925 milioane USD în 7,9 milioane ₳.

Prima acestei opțiuni va fi:

$P_{USD,A}(4{,}103896) = 0{,}197781$

Costul acestei scheme de hedging va fi:

$925000 \times 0{,}1748176 + 1925000 \times 0{,}197781 = 542434{,}7$,

deci cu mult mai mare decât cel al schemei precedente.

b) Este posibilă realizarea unei scheme de hedging pe bază de contracte forward, ceea ce nu va implica costuri de hedging. Într-adevăr, prețurile forward vor fi:

- Pentru USD: $F_1 = 4 \times e^{(0{,}1-0{,}06)\times 1} = 4{,}1632$
- Pentru EURO: $F_2 = 3{,}7 \times e^{(0{,}1-0{,}08)} = 3{,}7747$

Un contract forward pe 1 milion USD şi un contract forward pe 1 milion EURO, ar asigura la scadență 7,9379 milioane ~~A~~, ceea ce acoperă necesarul firmei.

Subiectul 2

Problema se reduce la calcul direct, utilizând formulele cunoscute pentru indicatorii DELTA, GAMA şi THETA.

Se mai poate aplica şi formula:

$$\Theta + r \cdot S \cdot \Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot S$$

cunoscută din curs.

Subiectul 3

a) Conform calculelor cunoscute din curs, (formula 6.10), avem:

$$D_0 = 800 \cdot e^{-0,09\times 3} - P(0, A_0)$$

Aplicând formula Black–Scholes:

$$P(0{,}1200) = 19{,}7881$$

Rezultă:

$$D_0 = 610{,}7035 - 19{,}7881 = 590{,}9155$$

Din:

$$590\cdot{,}9155 \times e^{-3\cdot r_1} = 800$$

rezultă:

$$r_1 = 10{,}0979\%$$

Prima de risc va fi:

$$\pi = 10{,}0979\% - 9\% = 1{,}0979\%$$

b) După un an, valoarea de piață a obligațiunii zero-cupon va fi:

$$D_1 = 800 \cdot e^{-0,1\times 2} - P(1, A_1)$$

În calculul valorii opțiunii put se va ține seama că $A_1 = 1{,}05 \times 1200 = 1260$, $\sigma = 32\%$, iar $r = 10\%$.

Efectuând calculele, rezultă că banca va putea vinde obligațiunea cu prețul:

$D_1 = 654{,}9846 - 13{,}3733 = 641{,}6113$

Suma de 641,6113 va fi investită într-o obligațiune zero-cupon având valoarea nominală de $1{,}0625 \times 800 = 850$.

Întrucât obligațiunea reprezintă un credit acordat noii firme avem:

$D_1 = 850 \cdot e^{-0{,}1 \times 2} - P(1{,}1000) = 641{,}6113$

Rezultă că valoarea opțiunii put este de.

$P(1{,}100) = 695{,}9211 - 641{,}6113 = 54{,}3098$

Pentru opțiunea put cunoaștem:

$S = 1000$; $E = 850$; $r = 10\%$; $P = 54{,}3098$; $T = 2$ ani.

Rezultă că volatilitatea implicită a firmei va fi de:

$\sigma = 34{,}8\%$.

Prima de risc aplicată firmei rezultă din relația:

$850 \times e^{-(0{,}1+\pi) \times 2} = 641{,}6113$

Rezultă:

$\pi = 4{,}06\%$.

Subiectul 4

Vom aplica lema lui Ito funcției $G = \dfrac{1}{S}$.

Avem:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial S} = -\frac{1}{S^2}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = 2 \cdot \frac{1}{S^3}$$

Conform lemei lui Ito (formula 3.38 în curs), avem:

$$dG = \left(-\frac{1}{S^2}(r_B - r_A)S + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{S^3}\sigma^2 \cdot S^2\right)dt + \left(-\frac{1}{S^2}\right)S \cdot \sigma \cdot dz$$

respectiv:

$$dG = \left((r_A - r_B)G + G \cdot \sigma^2\right)dt + G \cdot \sigma \cdot dz_1$$

sau

$$\frac{dG}{G} = \left((r_A - r_B) + \cdot\sigma^2\right)dt + \sigma \cdot dz_1$$

unde $G = \frac{1}{S}$, iar $dz_1 = -dz$.

Formula de mai sus este asemănătoare cu cea dată, respectiv:

$$\frac{dS}{S} = (r_B - r_A)dt + \sigma \cdot dz$$

cu deosebirea că la drift se adună $G \cdot \sigma^2$.

Subiectul 5

Aplicând formula Black–Scholes, rezultă că valoarea opțiunii call este:

$C = 8{,}725192$

Prima încasată va fi de:

$100000 \times 8{,}725192 = 872519{,}2$.

Fructificată pe o perioadă de 6 luni această sumă devine 916145,16 în cazul dobânzii simple şi de 917254,2 în cazul în care considerăm rata dobânzii instantanee.

Pentru a cumpăra cele 100000 de acțiuni, investitorul împrumută o sumă de 8 milioane, pentru care plăteşte o dobândă de 400000 în cazul dobânzii simple. În acest caz profitul său este de 516145,16 u.m.

Operatorul rămâne cu acest profit numai în cazul în care la scadență cursul acțiunii este mai mare sau egal cu 80 u.m.

Pentru a calcula pierderea maximă pe care poate să o aibă investitorul este necesar a calcula, cu o probabilitate de 99% intervalul în care se poate afla cursul acțiunii la scadență.

Se ştie că prețul acțiunii descrie o lege log-normală. În cazul considerat, media este $\mu = 0{,}1$ (egal cu rata dobânzii, pentru a exclude posibilitatea de arbitraj) şi $\sigma = 30\%$.

Pentru calculul intervalului de variație a cursului bursier, vom aplica formula (3.57) din curs.

Avem:

$2N(\alpha) - 1 = 0{,}99$

de unde:

$N(\alpha) = 0{,}995$.

Din tabelele privind probabilitatea cumulată la distribuția normală rezultă $\alpha = 2{,}58$.

Formula (3.57) devine:

$$\left(0{,}1 - \frac{1}{2} \times 0{,}3^2\right) \times 0{,}5 - 2{,}58 \times 0{,}3 \times \sqrt{0{,}5} \leq \ln \frac{S(T)}{80} \leq \left(0{,}1 - \frac{1}{2} \times 0{,}3^2\right) \times 0{,}5 + 2{,}58 \times 0{,}3 \times \sqrt{0{,}5}$$

respectiv:

$$0{,}0275 - 0{,}5473 \leq \ln \frac{S(T)}{80} \leq 0{,}0275 + 0{,}5473$$

$$-0{,}5198 \leq \ln \frac{S(T)}{S(0)} \leq 0{,}5748$$

Se obține:

$$0{,}5946 \leq \frac{S(T)}{80} \leq 1{,}7767$$

Rezultă că după 6 luni, cu o probabilitate de 90%, cursul acțiunii se va afla în intervalul:

$$47{,}57 \leq S(T) \leq 142{,}136$$

În cazul în care cursul se va afla în intervalul $[80;142{,}136]$ investitorul va fi complet acoperit şi al va rămâne cu câştigul net calculat care este de 516145,16 u.m., adică un câştig net de 5,16 pe opțiune.

În cazul în care cursul scade la:

80–5,16=74,84 u.m./acțiune

câştigul său va fi nul.

Dacă cursul scade sub 74,84, investitorul începe să aibă pierderi, pierderea maximă fiind în cazul în care cursul ajunge la nivelul minim de 47,57. În acest caz, <u>pierderea sa netă</u>, pe opțiune va fi de:

$$5{,}16 - (80 - 47{,}57) = -27{,}27$$

Rezultă că <u>pierderea maximă</u> pe care poate să o aibă investitorul, cu o probabilitate de 99% este de <u>2727000</u>, respectiv 2,727 milioane. El începe să înregistreze pierdere în cazul în care cursul acțiunii scade sub 74,84 u.m., şi pierderea lui creşte odată cu scăderea cursului.