ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE

TEORIA PORTOFOLIULUI

Prof. univ. dr. Moisă Altăr

București, ianuarie 2002

TEORIA PORTOFOLIULUI

Prof. univ. dr. Moisă Altăr

Cuprins

TEORIA PORTOFOLIULUI

Capitolul I - Portofolii eficiente. Frontiera Markowitz.

Prof. univ. dr. Moisă Altăr

1. Riscul şi rentabilitatea unei acţiuni.

Se va considera că pe piaţă cotează un număr de n acţiuni. Rentabilitatea acţiunii i (R_i), în intervalul de timp de la t=0 la t=1, este dată de următoarea formulă:

$$R_i = \frac{(P_1 - P_0) + D_1}{P_0} \qquad \textbf{(1)}$$

Cu P_0 şi P_1 s-a notat cursul acţiunii la momentele t=0, respectiv t=1, iar cu D_1 s-a notat mărimea dividendului.

În formula **(1)** mărimile P_1 şi D_1 sunt variabile aleatoare, ceea ce face ca şi R_i să fie variabilă aleatoare.

Vom presupune că pentru momentul viitor t=1 au fost identificate un număr de q stări posibile ale economiei, precum şi probabilităţile p_k de realizare a fiecărei stări. În identificarea stărilor posibile se va lua în calcul şi situaţia ramurii economice în care se află întreprinderea emitentă a acţiunii i.

Pentru fiecare stare k, pe baza identificării cursurilor P_{ik} şi al dividendului D_{ik} vor fi calculate rentabilităţile R_{ik}. În acest mod, se formează distribuţia:

$$R_i : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & ,..., & p_q \\ R_{i1} & R_{i2} & ,..., & R_{iq} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

unde $p_k \geq 0$, $k = \overline{1,q}$ şi $\sum_{k=1}^{q} p_k = 1$.

Rentabilitatea medie (aşteptată) a acțiunii i este:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^{q} p_k R_{ik} \tag{3}$$

Abaterea rentabilității față de medie este:

$$R_i - E(R_i): \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & ,..., & p_q \\ R_{i1} - E(R_i) & R_{i2} - E(R_i) & ,..., & R_{iq} - E(R_i) \end{pmatrix}$$

iar <u>varianța</u> (dispersia) rentabilității este:

$$\sigma_i^2 = \text{var}(R_i) = E([R_i - E(R_i)]^2) \tag{4}$$

Conform convenției adoptată în domeniul financiar-monetar $\sigma_i = \sqrt{\text{var}(R_i)}$ cuantifică mărimea <u>riscului</u> acțiunii i. Cu cât mărimea lui σ_i este mai mare cu atât riscul asumat de un investitor care achiziționează acțiunea i este mai mare. Afirmația de mai sus este valabilă numai dacă investitorul achiziționează acțiunea i fără a o introduce într-un portofoliu în care se află şi alte acțiuni.

<u>**Definiție:**</u> Se numeşte portofoliu de n acțiuni un vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, unde cu x_i $(i = \overline{1,n})$ s-a notat ponderea sumei investite în acțiunea i în totalul sumei investite.

<u>**Observație:**</u> În cazul în care reglementările pieței permit operații de tipul ***„short selling”*** unele dintre componentele vectorului x pot fi negative.

2. Media, varianța şi covarianța.

Pentru scrierea ecuațiilor unui portofoliu vor fi reamintite unele dintre proprietățile mediei, respectiv ale varianței unei variabile aleatoare. Cu litera z vor fi notate variabilele aleatoare, iar cu litera c vor fi notate constante.

Proprietățile mediei

$$\begin{aligned} &E(c) = c \\ &E(c \cdot z) = cE(z) \\ &E(z_1 + z_2) = E(z_1) + E(z_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Proprietățile varianței

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}(c) = 0\\&\mathrm{var}(c \cdot z) = c^2\, \mathrm{var}(z)\\&\mathrm{var}(z_1 + z_2) = \mathrm{var}(z_1) + \mathrm{var}(z_2) + 2\,\mathrm{cov}(z_1, z_2)\end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

Covarianța a două variabile aleatoare este, prin definiție:

$$\sigma_{12} = \mathrm{cov}(z_1, z_2) = E[(z_1 - E(z_1))(z_2 - E(z_2))] \qquad \textbf{(7)}$$

Covarianța dintre două variabile aleatoare cuantifică nivelul „dependenței” dintre cele două variabile. Dacă $\sigma_{ij} = 0$, atunci rezultă că cele două variabile evoluează relativ „independent” una de cealaltă. Dacă $\sigma_{ij} > 0$, rezultă că variabilele aleatoare z_i şi z_j evoluează în acelaşi sens, iar dacă $\sigma_{ij} < 0$ atunci se poate trage concluzia că variabilele aleatoare evoluează „în sens contrar”. De exemplu, dacă $\mathrm{cov}(R_i, R_j) < 0$, atunci rezultă că dacă rentabilitatea R_i a acțiunii i va creşte, rentabilitatea acțiunii j (R_j) va avea tendința de a scădea.

Coeficientul de corelație dintre două variabile aleatoare z_i şi z_j este:

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{cov}(z_i, z_j)}{\sigma_i \sigma_j} \qquad \textbf{(8)}$$

Coeficientul de corelație ρ_{ij} variază în intervalul [-1, 1]. Se ştie din teoria probabilităților faptul că dacă $|\rho_{ij}| = 1$, atunci între variabilele aleatoare z_i şi z_j există o dependență liniară de forma:

$$z_i = a \cdot z_j + b \qquad \textbf{(9)}$$

cu $a > 0$ dacă $\rho_{ij} = 1$ şi cu $a < 0$ dacă $\rho_{ij} = -1$.

Proprietăți ale covarianței

$$\sigma_{ii} = \mathrm{cov}(z_i, z_j) = E[(z_i - E(z_i))(z_j - E(z_j)) \qquad \textbf{(10)}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \textbf{(11)}$$

$$\left|\sigma_{ij}\right| = \left|\rho_{ij}\right| \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \leq \sigma_i \cdot \sigma_j$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $\left|\rho_{ij}\right| = 1$ **(12)**

În cazul în care variabila aleatoare z_j este o combinaţie liniară de alte variabile aleatoare, respectiv:

$$z_j = c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_k z_k \qquad \textbf{(13)}$$

atunci:

$$\text{cov}(z_i, z_j) = c_1 \,\text{cov}(z_i, z_1) + c_2 \,\text{cov}(z_i, z_2) + ... + c_k \,\text{cov}(z_i, z_k) \qquad \textbf{(14)}$$

Proprietatea **(14)** rezultă din formula **(7)** care defineşte covarianţa:

$$E[(z_i - E(z_i))(c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_k z_k - c_1 E(z_1) - c_2 E(z_2) - ... - c_k E(z_k)) = \\ = c_1 \sigma_{i1} + c_2 \sigma_{i2} + ... + c_k \sigma_{ik} \qquad \textbf{(15)}$$

Vom face observaţia că formulele **(5)** se pot generaliza pentru un număr de n variabile aleatoare:

$$E(c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_n z_n) = c_1 E(z_1) + c_2 E(z_2) + ... + c_n E(z_n) \qquad \textbf{(16)}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_n z_n) = {} & c_1^2 \,\text{var}(z_1) + c_2^2 \,\text{var}(z_2) + ... + c_n^2 \,\text{var}(z_n) + \\ & + 2c_1 c_2 \,\text{cov}(z_1, z_2) + 2c_1 c_2 \,\text{cov}(z_1, z_2) + ... + 2c_1 c_n \,\text{cov}(z_1, z_n) + \\ & + 2c_2 c_3 \,\text{cov}(z_2, z_3) + 2c_2 c_4 \,\text{cov}(z_2, z_4) + ... + 2c_{n-1} c_n \,\text{cov}(z_{n-1}, z_n) \end{aligned} \qquad \textbf{(17)}$$

Formula **(17)** se mai poate scrie astfel:

$$\text{var}(c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_n z_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} c_k c_j \sigma_{kj} \qquad \textbf{(17')}$$

Dacă se notează cu Ω <u>matricea de varianţă-covarianţă :</u>

$$\Omega = (\sigma_{kj})_{n \times n} \qquad \textbf{(18)}$$

şi cu c vectorul coloană (cu "T" se notează vectorul transpus) $c = (c_1, c_2, ... c_n)^T$ atunci formula **(17')** se mai poate scrie matriceal astfel:

$$\operatorname{var}(c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n) = c^T \cdot \Omega \cdot c \qquad \textbf{(19)}$$

În formula **(19)** s-a ținut seama că matricea Ω de varianță-covarianță este simetrică, respectiv $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$.

3. Ecuațiile portofoliului de acțiuni.

Vom presupune un portofoliu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ format din n acțiuni. Pentru fiecare acțiune se cunoaşte rentabilitatea medie $E(R_i)$ şi riscul σ_i $(i = \overline{1,n})$. De asemenea, se presupun cunoscute covarianțele σ_{ij} $(i, j = \overline{1,n}$).

Rezultă că pentru activele care pot intra în structura portofoliului se cunoaşte:

- Vectorul rentabilităților aşteptate

$$\mu = (E(R_1), E(R_2), ..., E(R_n))^T \qquad \textbf{(20)}$$

- Matricea de varianță-covarianță

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(21)}$$

Reamintim că matricea Ω este simetrică, respectiv elementele simetrice față de diagonala principală sunt egale: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Aplicând proprietățile prezentate în paragraful prezent, rezultă:

$$\begin{cases} E(R_p) = \sum_{k=1}^{n} x_k E(R_k) & \textbf{(22)} \\ \sigma_p^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k x_j \sigma_{kj} & \textbf{(23)} \\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 & \textbf{(24)} \end{cases}$$

Cu $E(R_p)$ şi σ_p s-au notat rentabilitatea, respectiv riscul portofoliului.

Ecuaţiile **(22)-(24)** reprezintă **ecuaţiile portofoliului de active financiare** şi pot fi scrise matricial astfel:

$$\begin{cases} E(R_p) = x^T \mu & \textbf{(25)} \\ \sigma_p^2 = x^T \cdot \Omega \cdot x & \textbf{(26)} \\ e^T \cdot x = 1 & \textbf{(27)} \end{cases}$$

Au fost utilizate următoarele notaţii:

$$\begin{cases} x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \\ \mu^T = (E(R_1), E(R_2), ..., E(R_n)) \\ e = (1,1,...,1)^T \end{cases} \qquad \textbf{(28)}$$

Cu μ s-a notat vectorul – coloană al rentabilităţilor, iar cu e un vector - coloană $n-$dimensional având toate componentele egale cu unu.

Ecuaţia **(23)** se poate scrie:

$$\sigma_p^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sigma_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} x_k x_j \sigma_{kj} \qquad \textbf{(29)}$$

Vom mai scrie ecuaţia **(29)** şi astfel:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = {} & x_1(x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_{12}^2 + ... + x_n\sigma_{1n}^2) + x_2(x_1\sigma_{21}^2 + x_2\sigma_2^2 + ... + x_n\sigma_{2n}^2) + \\ & + ... + x_n(x_1\sigma_{n1}^2 + x_2\sigma_{n2}^2 + ... + x_n\sigma_n^2) \end{aligned} \qquad \textbf{(30)}$$

Ţinând seama de proprietăţile covarianţei, prezentate în paragraful 2, avem că expresia
$x_1\sigma_{k1}^2 + x_2\sigma_{k2}^2 + ... + x_n\sigma_{kn}^2$
reprezintă covarianţa dintre activul financiar k şi întregul portofoliu. Vom nota această covarianţă cu σ_{kp}, respectiv:

$$\mathrm{cov}(R_k, R_p) = \sigma_{kp} = x_1\sigma_{k1} + x_2\sigma_{k2} + \ldots + x_n\sigma_{kn} \tag{31}$$

Cu această notație varianța portofoliului se mai poate scrie:

$$\sigma_p^2 = x_1\sigma_{1p} + x_2\sigma_{2p} + \ldots + x_n\sigma_{np} \tag{30'}$$

sau:

$$\sigma_p^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k\sigma_{kp} \tag{30''}$$

Vom calcula senzitivitatea riscului portofoliului, σ_p, în raport cu variația ponderii activului i în portofoliu. În prealabil, vom observa utilizând formula **(31)** că:

$$\frac{\partial\sigma_{kp}}{\partial x_i} = \sigma_{ki} \tag{31'}$$

Folosind formula **(31')** avem succesiv:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i} = \frac{\partial\left(\sqrt{x_1\sigma_{1p} + x_2\sigma_{2p} + \ldots x_i\sigma_{ip} + \ldots + x_n\sigma_{np}}\right)}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{1}{2\sigma_p}\left(x_1\frac{\partial\sigma_{1p}}{\partial x_i} + x_2\frac{\partial\sigma_{2p}}{\partial x_i} + \ldots + x_{i-1}\frac{\partial\sigma_{i-1p}}{\partial x_i} + \sigma_{ip} + x_i\frac{\partial\sigma_{ip}}{\partial x_i} + \ldots + x_n\frac{\partial\sigma_{np}}{\partial x_i}\right)$$

Ținând seama de relația **(31'),** și rearanjând termenii din formula de mai sus rezultă:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sigma_P}\left(x_1\sigma_{1i} + x_2\sigma_{2i} + \ldots + x_i\sigma_{ii} + \ldots + x_n\sigma_{ni} + \sigma_{ip}\right) = \frac{1}{2\sigma_p}(\sigma_{ip} + \sigma_{ip}) = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p}$$

Vom nota:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial x_i} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p} = \gamma_i \qquad i = \overline{1,n} \tag{32}$$

Coeficientul γ_i va fi numit <u>coeficient de senzitivitate a riscului portofoliului în raport cu activul</u> i.

Vom observa că σ_p este o funcție omogenă de gradul unu în raport cu $x_1, x_2, ..., x_n$. Utilizând formula lui Euler pentru funcțiile omogene, rezultă:

$$\sigma_p = \frac{\partial \sigma_p}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \sigma_p}{\partial x_2} x_2 + ... + \frac{\partial \sigma_p}{\partial x_n} x_n$$

şi, utilizând **(32)** se obține:

$$\sigma_p = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + ... + \gamma_n x_n \qquad \textbf{(33)}$$

Observații:

1. Relația **(33)** se poate obține direct şi din **(30')** prin împărțirea ambilor membrii cu σ_p $i = \overline{1, n}$.

2. Coeficienții γ_i sunt indicatori de risc, ei cuantificând riscul fiecărui active i în raport cu portofoliul considerat.

3. În raport cu formula obişnuită a riscului

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}$$

care este o formulă neliniară, formula **(33)** are avantajul că este o formulă liniară.

4. Împărțind ambii membrii ai formulei **(33)** cu σ_p se obține:

$$1 = \beta_1^p x_1 + \beta_2^p x_2 + ... + \beta_n^p x_n \qquad \textbf{(34)}$$

S-a notat:

$$\beta_i^p = \frac{\gamma_i}{\sigma_p} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p^2} \qquad \textbf{(35)}$$

Indicatorul β_i^p va fi numit volatilitatea activului i în raport cu portofoliul P.

4. Aplicația 1.

Vom considera un portofoliu format din trei active. Se cunosc următoarele elemente: $E(R_1) = 14\%$, $E(R_2) = 16\%$, $E(R_3) = 20\%$. Coeficienții de risc intrinsec sunt: $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 15\%$, $\sigma_3 = 30\%$. Coeficienții se presupun a fi: $\rho_{12} = 0{,}25$, $\rho_{13} = 0$, $\rho_{23} = -0{,}5$. Coeficienții de covarianță vor fi:

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 0{,}00375$$
$$\sigma_{13} = \rho_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 = 0$$
$$\sigma_{23} = \rho_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = -0{,}0225$$

Matricea de varianță-covarianță este:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}00375 & 0 \\ 0{,}00375 & 0{,}01 & -0{,}0225 \\ 0 & -0{,}0225 & 0{,}09 \end{pmatrix}$$

Se va considera un portofoliu având următoarea structură: $x_1 = 40\%$, $x_2 = 30\%$, $x_3 = 30\%$. Rezultă că portofoliul este: $x^T = (0{,}4; 0{,}3; 0{,}3)$.

Varianța portofoliului va fi:

$$\sigma_p^2 = (0{,}4;0{,}3;0{,}3) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}00375 & 0 \\ 0{,}00375 & 0{,}01 & -0{,}0225 \\ 0 & -0{,}0225 & 0{,}09 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(A)}$$

$$\sigma_p^2 = (0{,}4;0{,}3;0{,}3) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}005125 \\ 0{,}0015 \\ 0{,}02025 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = 0{,}008575$$

Riscul portofoliului va fi: $\sigma_p = \sqrt{0{,}008575} = 0{,}0926$.

Rentabilitatea aşteptată a portofoliului este:

$$E(R_p) = 0{,}4 \cdot 0{,}14 + 0{,}3 \cdot 0{,}16 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1620 \ .$$

Aşadar, portofoliul construit are o rentabilitate $E(R_p) = 16{,}20\%$ şi un risc $\sigma_p = 9{,}26\%$.

Din calculele efectuate mai sus (formula **(A)** rezultă următorii coeficienți de corelație dintre fiecare activ şi portofoliul P:

$$\sigma_{1p} = 0{,}005125 \ ; \quad \sigma_{2p} = 0{,}0015 \ ; \ \sigma_{3p} = 0{,}02025 .$$

Coeficienții de senzitivitate sunt:

$$\gamma_1 = \frac{\sigma_{1p}}{\sigma_p} = 0{,}0553 = 5{,}53\% \qquad \gamma_2 = \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_p} = 0{,}0162 = 1{,}62\%$$

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_{3p}}{\sigma_p} = 0{,}2187 = 21{,}87\%$$

iar coeficienții de volatilitate a activelor în raport cu portofoliul P sunt:

$$\beta_1^p = \frac{\gamma_1}{\sigma_p} = 0{,}5972 \ , \quad \beta_2^p = \frac{\gamma_2}{\sigma_p} = 0{,}1749 \ , \ \beta_3^p = \frac{\gamma_3}{\sigma_p} = 2{,}3618 \ .$$

Observație:

Vom observa că deşi activul 2 are riscul intrinsec $\sigma_2 = 15\%$, respective de 1,5 ori mai mare decât riscul activului 1 ($\sigma_1 = 10\%$), coeficientul de senzitivitate γ_2 este mult mai mic decât γ_1 . Aceasta înseamnă că din punct de vedere al riscului portofoliului, activul 2 se comportă mult mai bine decât activul 1.

Aceasta conduce la concluzia că indicatorii de risc intrinsec σ_k furnizează informații destul de “sumare”, ele trebuind să fie correlate cu informațiile furnizate de indicatori γ_k şi $\beta_k{}^p$.

5. Portofolii eficiente

Definiție: Un portofoliu de active financiare **P** se numeşte **eficient** (optim Pareto) dacă nu se poate forma nici un portofoliu **Q** care să aibă aceeaşi rentabilitate cu **P,** dar să aibă un risc mai mic decât acesta.

În mod echivalent se poate spune că portofoliul **P** este eficient (optim Pareto) dacă nu se poate forma nici un portofoliu **Q** care să aibă acelaşi risc cu **P**, dar să aibă o rentabilitate mai mare decât acesta.

Pentru a genera portofolii eficiente, vom calcula structura unui portofoliu care să asigure o rentabilitate medie egală cu ρ (mărime dată) cu un risc minim.

Aplicând ecuațiile de portofoliu **(22)** - **(24)** şi notând pentru uşurarea scrierii:

$$\mu_k = E(R_k) \tag{37}$$

vom formula următoarea problemă de minim:

$$\begin{cases} \min \ \dfrac{1}{2}\sigma_P^2 = \min \ \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_k x_j \sigma_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \mu_k = \rho \\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \end{cases} \tag{38}$$

Lagrangeanul problemei este:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{kj} - \lambda_1\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mu_k - \rho\right) - \lambda_2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - 1\right) \tag{39}$$

Cu λ_1 și λ_2 s-au notat multiplicatorii Lagrange corespunzători celor două restricții ale problemei de optim.

Condițiile necesare de optim, despre care se demonstrează uşor că sunt şi suficiente sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \ldots\ldots \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \qquad \textbf{(40)}$$

Avem:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{kj} + \sum_{k=1}^{n} x_k \sigma_{jk}\right] - \lambda_1 \mu_k - \lambda_2 = 0, \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}} \qquad \textbf{(41)}$$

Ținând seama că $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$ rezultă că cele două sume din formula (41) sunt egale; rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{kj} x_j - \lambda_1 \mu_k - \lambda_2 e = 0,\ \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}} \qquad \textbf{(42)}$$

Sistemul de n ecuații cu n necunoscute de mai sus se poate scrie matricial astfel:

$$\Omega \cdot x - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0 \qquad \textbf{(43)}$$

S-a notat $\mu = (\mu_1, \mu_1, \ldots\ldots, \mu_n)^T$ iar e este vectorul coloană de dimensiune n cu toate componentele egale cu unu ($e = (1, 1, \ldots\ldots, 1)^T$).

Se obține:

$$\Omega \cdot x = \lambda_1 \mu + \lambda_2 e$$

de unde:

$$x = \lambda_1 \Omega^{-1} \mu + \lambda_2 \Omega^{-1} e \qquad \textbf{(44)}$$

Soluția **(44)** conține două necunoscute, respectiv multiplicatorii λ_1 şi λ_2. Pentru calculul lui λ_1 şi λ_2 vom folosi ultimele două ecuații din **(38)**. Acestea se pot scrie vectorial astfel:

$$x^T \mu = \rho \tag{45}$$

$$x^T e = 1 \tag{46}$$

Din **(44)** rezultă :

$$x^T = \lambda_1 \mu^T \Omega^{-1} + \lambda_2 e^T \Omega^{-1} \tag{47}$$

Din relațiile **(45)-(46)** rezultă:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mu^T \Omega^{-1} \mu + \lambda_2 e^T \Omega^{-1} \mu = \rho \\ \lambda_1 \mu^T \Omega^{-1} e + \lambda_2 e^T \Omega^{-1} e = 1 \end{cases} \tag{48}$$

Vom utiliza următoarele notații:

$$A = e^T \Omega^{-1} e;\ \mathrm{B} = e^T \Omega^{-1} \mu;\ \mathrm{C} = \mu^T \Omega^{-1} \mu \text{ şi } \mathrm{D} = AC - B^2 \tag{49}$$

Menționăm că A, B şi C sunt scalari.

Sistemul de ecuații **(48)** devine:

$$\begin{cases} C\lambda_1 + B\lambda_2 = \rho \\ B\lambda_1 + A\lambda_2 = 1 \end{cases} \tag{50}$$

Soluția pentru cei doi multiplicatori λ_1 şi λ_2 este:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho & B \\ 1 & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C & B \\ B & A \end{vmatrix}} = \frac{A\rho - B}{AC - B^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} C & \rho \\ B & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C & B \\ B & A \end{vmatrix}} = \frac{C - \rho B}{AC - B^2} \quad \textbf{(51)}$$

Utilizând valorile pentru multiplicatori λ_1 şi λ_2 date de **(51)**, soluția **(44)** devine:

$$x = \frac{1}{D}\left[(A\rho - B)\Omega^{-1}\mu + (C - \rho B)\Omega^{-1}e_n\right] \quad \textbf{(52)}$$

Conform formulei **(31)**, vectorul coeficient de covarianță a fiecărui activ cu portofoliul P care asigură rentabilitatea ρ cu un risc minim va fi:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1P} \\ \sigma_{2P} \\ \cdots \\ \sigma_{nP} \end{pmatrix} = \Omega \cdot x = \frac{1}{D}\left[(A\rho - B)\mu_n + (C - \rho B)e_n\right] \quad \textbf{(53)}$$

Varianța portofoliului P va fi:

$$\sigma_P^{\ 2} = (x)^T \Omega \cdot x = \frac{1}{D}\left[(A\rho - B)\mu_n^{\ T}\Omega^{-1} + (C - \rho B)e_n^{\ T}\Omega^{-1}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{D}\left[(A\rho - B)\mu_n + (C - \rho B)e_n\right]$$

$$\sigma_P^{\ 2} = \frac{1}{D^2}\left[(A\rho - B)^2 C + 2(C - \rho B)(A\rho - B)B + (C - \rho B)A\right]$$

$$\sigma_P^{\ 2} = \frac{1}{D^2}\left[A^2 C\rho^2 - 2ABC\rho + B^2 C + 2ABC\rho - 2AB^2\rho^2 - 2B^2 C + 2B^3\rho\right] +$$

$$+ \frac{1}{D^2}\left[AC^2 - 2ABC\rho + B^2 A\rho^2\right]$$

$$\sigma_P^{\ 2} = \frac{1}{D^2}\left[A\left(AC - B^2\right)\rho^2 - 2B(AC - B^2)\rho + C\left(AC - B^2\right)\right]$$

Ținând seama că conform **(46)** avem $AC - B^2 = D$, rezultă:

$$\sigma_P{}^2 = \frac{1}{D}\left[A\rho^2 - 2B\rho + C\right] \tag{54}$$

Formula **(54)** pune în evidență relația dintre rentabilitatea ρ a portofoliului şi riscul minim obtenabil corespunzător.

Graficul funcției **(54)** este prezentat în figura 1, ea fiind o hiperbolă.

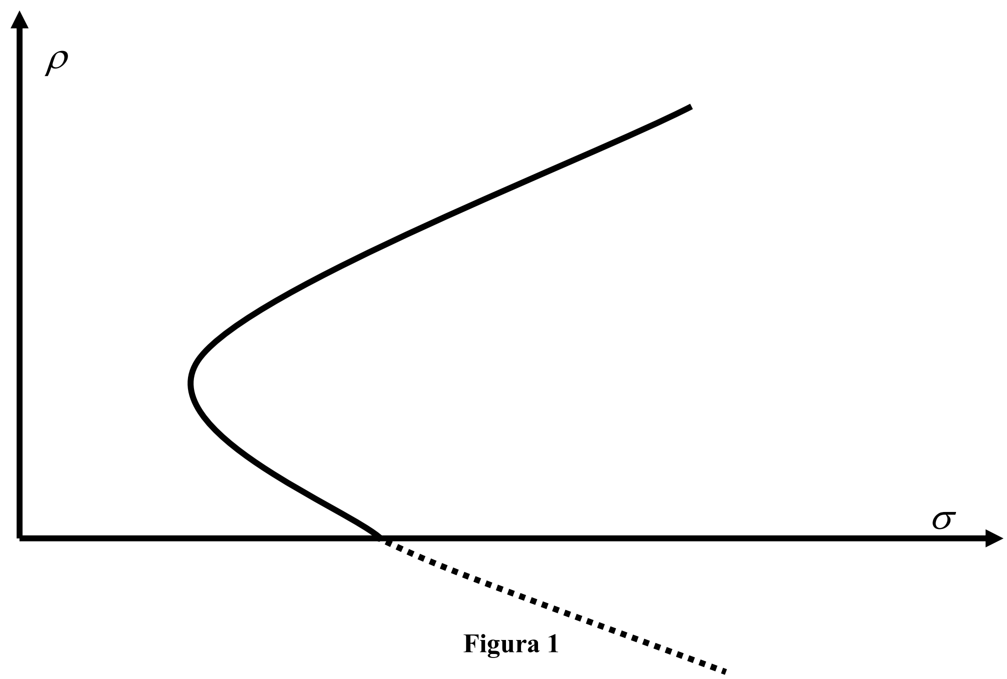


Figura 1

Portofoliul V cu cel mai mic risc posibil (risc minim global) corespunde valorii:

$$\rho_V = \frac{B}{A} \tag{55}$$

Riscul portofoliului cu cel mai mic risc posibil (portofoliul de risc minim) este:

$$\sigma_V{}^2 = \frac{1}{A} \tag{56}$$

Înlocuind în **(52)** pe ρ_V din formula **(55)** rezultă că portofoliul de risc minim global are următoarea structură:

$$x_V = \frac{1}{A}\Omega^{-1}e \tag{57}$$

Ținând seama de **(49)**, formulele **(55)-(57)** care caracterizează portofoliul de risc minim global V se pot scrie:

$$\begin{cases} \rho_V = \dfrac{e^T\Omega^{-1}}{e^T\Omega^{-1}e}\mu; \\ \sigma_V{}^2 = \dfrac{1}{e^T\Omega^{-1}e} \\ x_V = \dfrac{1}{e^T\Omega^{-1}e}\Omega^{-1}e \end{cases} \tag{58}$$

Observații:

1. Calculele de mai sus au fost efectuate în ipoteza că matricea de varianță-covarianță nu este degenerată ($\det\Omega \neq 0$), şi deci ea este inversabilă.

   În cazul în care $\det\Omega = 0$, calculul efectuat trebuie reluat şi trebuie ținut seama de faptul că matricea de varianță-covarianță nu este inversabilă.

   Pentru exemplificare acest lucru va fi făcut pentru cazul n=2. În acest caz dacă $\rho_{12} = -1$, matricea de varianță-covarianță devine:

   $$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{pmatrix}$$

   Determinantul matricei este zero.

2. Vom observa că mărimea:

   $$A = e^T\Omega^{-1}e$$

este egală cu suma tuturor elementelor matricii Ω^{-1}. Expresia $\Omega^{-1}e$ este un vector coloană având componentele egale cu suma elementelor pe linii ale matricii Ω^{-1}.

Aceste observații permit o mai bună interpretare financiară a formulelor (58). Vectorii $e = (1,1,\ldots,1)^T$ şi $e^T = (1,1,\ldots,1)$ se numesc operatori de însumare, datorită faptului că înmulțiți cu o matrice efectuează operația de adunare a elementelor pe linii, respectiv pe coloane, ale matricei.

6. Teorema celor două portofolii fundamentale (fonduri mutuale) (I)

Formula **(44)** care furnizează expresia generală pentru un portofoliu eficient, se scrie:

$$x = \lambda_1 \Omega^{-1} \mu + \lambda_2 \Omega^{-1} e \tag{59}$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt multiplicatorii Lagrange.

Vom presupune că:

$$A = e^T \Omega^{-1} e \neq 0 \tag{60}$$

$$B = e^T \Omega^{-1} \mu \neq 0$$

În acest caz formula (59) se mai poate scrie:

$$x = (\lambda_1 B)\frac{\Omega^{-1}\mu}{B} + (\lambda_2 A)\frac{\Omega^{-1}e}{A} \tag{61}$$

Observăm că:

$$x_V = \frac{\Omega^{-1}e}{A} = \frac{\Omega^{-1}e}{e^T \Omega^{-1} e}$$

coincide cu a treia formulă din **(58)**, şi este formula care dă structura portofoliului de risc minim global.

Vom nota cu x_W portofoliul având structura:

$$x_W = \frac{\Omega^{-1}\mu}{B} = \frac{\Omega^{-1}\mu}{e^T\Omega^{-1}\mu} \tag{62}$$

Vom mai face observația că formula a doua din **(50)** arată că

$$\lambda_1 B + \lambda_2 A = 1 \tag{63}$$

Ceea ce arată că orice portofoliu eficient x se poate scrie ca o combinație convexă a portofoliilor x_V şi x_W (relația (61)).

$$x = \lambda \cdot x_V + (1-\lambda)x_W \tag{64}$$

unde s-a notat cu $\lambda = \lambda_2 A,$ respectiv $1-\lambda = \lambda_1 B$.

Aşadar este suficient să cunoaştem structura portofoliilor x_V şi x_W pentru a fi în măsură să putem scrie ecuația oricărui portofoliu eficient (care sunt în număr infinit) utilizând formula **(64).**

De exemplu, alegând $\lambda = 0{,}5$ putem scrie:

$$x = 0{,}5 \cdot x_V + 0{,}5 \cdot x_W \tag{64'}$$

Avem siguranța că formula **(64')** furnizează structura unui portofoliu eficient.

Observație importantă: din punct de vedere financiar, formula **(64)** evidențiază faptul că pentru a obține un portofoliu eficient este suficient să investim proporția $\lambda : (1-\lambda)$ în portofoliile (fondurile mutuale) care au structura x_V, respectiv x_W.

În funcție de alegerea lui λ vom obține o rentabilitate dată cu un risc minim. Pentru a evidenția rentabilitatea portofoliului x în funcție de parametrul λ, vom utiliza relația **(50)**:

$$C\lambda_1 + B\lambda_2 = \rho$$

Ştiind că $\lambda_1 = \frac{1-\lambda}{B}$ şi $\lambda_2 = \frac{\lambda}{A}$ obținem: $\frac{C}{B}(1-\lambda) + \frac{B}{A}\lambda = \rho$

Prin calcul obținem:

$$\lambda = \frac{A}{D}\left[C - B \cdot \rho\right] \tag{65}$$

$$\rho = \frac{1}{B}\left[C - \frac{D}{A}\lambda\right] \tag{65'}$$

Dacă investitorul stabileşte rentabilitatea ρ pe care doreşte să o obțină , atunci va folosi formula **(65)** pentru a deduce ce pondere λ să investească în fondul mutual x_V , iar $(1-\lambda)$ va investi în fondul mutual x_W .

În cazul în care s-a investit o pondere λ în fondul mutual x_V şi $(1-\lambda)$ în fondul mutual x_W , utilizând formula **(65')** vom calcula rentabilitatea ρ a portofoliului.

De exemplu, dacă $\lambda = 1$, din **(65')** obținem:

$$\rho_V = \frac{1}{B}\left[C - \frac{D}{A}\right] = \frac{AC - D}{BA} = \frac{AC - AC + B^2}{BA}$$, respectiv

$$\rho_V = \frac{B}{A}$$, ceea ce coincide cu prima formulă din **(58).**

Dacă $\lambda = 0$, obținem:

$$\rho_W = \frac{1}{B}C = \frac{C}{B}$$

Rezultă că rentabilitatea portofoliului x_W este:

$$\rho_W = \frac{C}{B} = \frac{\mu^T \Omega^{-1} \mu}{e^T \Omega^{-1} \mu} \qquad \textbf{(66)}$$

Observăm că, din formula **(65)** rezultă $C - B\rho \geq 0$, ceea ce implică

$$\rho \leq \frac{C}{B} = \frac{\mu^T \Omega^{-1} \mu}{e^T \Omega^{-1} \mu} = \rho_W \qquad \textbf{(67)}$$

Din **(66)** rezultă că portofoliul W este portofoliul eficient care asigură cea mai mare rentabilitate pe piață, excluzând bineînțeles operațiunile de tip „short-selling" între cele două portofolii (V şi W). În cazul în care se admit operațiuni de tip „short-selling", multiplicatorul λ poate fi supraunitar şi, în consecință, se pot obține rentabilități mai mari decât ρ_W

Pentru a calcula varianța portofoliului W vom folosi formulele **(54)** şi **(66):**

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{D}\left[A\frac{C^2}{B^2} - 2B\frac{C}{B} + C\right]$$

de unde

$$\sigma_W^2 = \frac{C}{B^2} = \frac{\mu^T \Omega^{-1} \mu}{e^T \Omega^{-1} \mu} \cdot \frac{1}{B} = \frac{1}{B} \rho_W$$

Rezultă că portofoliul W are următoarele caracteristici:

$$\begin{cases} \rho_W = \dfrac{C}{B} = \dfrac{\mu^T \Omega^{-1} \mu}{e^T \Omega^{-1} \mu}; \\ \sigma_W^2 = \dfrac{C}{B^2} = \dfrac{\mu^T \Omega^{-1} \mu}{\left(e^T \Omega^{-1} \mu\right)^2} \\ x_W = \dfrac{1}{B} \Omega \mu = \dfrac{1}{e^T \Omega^{-1} \mu} \Omega^{-1} \mu \end{cases} \quad \textbf{(68)}$$

Din faptul că:

$$D = AC - B^2 > 0$$

rezultă că :

$\dfrac{C}{B^2} > \dfrac{1}{A}$, respectiv $\sigma_W^2 > \sigma_V^2$

ceea ce este normal, întrucât portofoliul W are o rentabilitate aşteptată mai mare.
Covarianţa dintre portofoliile V şi W este:

$$\sigma_{VW} = x_V^T \Omega \cdot x_W = \left(\frac{1}{A} \Omega^{-1} e \right)^T \Omega \left(\frac{1}{A} \Omega^{-1} \mu \right)$$

$$\sigma_{VW} = \frac{1}{A} \left(e^T \Omega^{-1}\right) \Omega \left(\frac{1}{B} \Omega^{-1} \mu \right) = \frac{1}{A} \frac{B}{B}$$

rezultă că:

$$\sigma_{VW} = \frac{1}{A} \quad \textbf{(69)}$$

Vom demonstra că portofoliul cu cel mai mic risc global V are proprietatea că are aceeaşi covarianţă cu orice portofoliu eficient. Într-adevăr, fie un portofoliu eficient:

$$x = \lambda \cdot x_V + (1-\lambda) x_W$$

$$\sigma_{Vx} = x_V^T \Omega \cdot x = x_V^T \Omega \cdot \left(\lambda \cdot x_{x_V^T} + (1-\lambda) x_W \right) = \lambda \cdot x_V^T \Omega \cdot x_V + (1-\lambda) x_V^T \Omega \cdot x_W =$$

$$= \lambda \cdot \sigma_V^2 + (1-\lambda) \sigma_{vw} = \lambda \frac{1}{A} + (1-\lambda) \frac{1}{A} = \frac{1}{A}$$

Rezultă aşadar că oricare ar fi portofoliul eficient $x = \lambda \cdot x_v + (1-\lambda) x_w$,

$$\sigma_{v,x} = \frac{1}{A} = \text{constant} \qquad \textbf{(70)}$$

Proprietatea **(70)** reprezintă o caracteristică remarcabilă a portofoliului V (cu cel mai mic risc global).

7. Proprietăți ale frontierei Markowitz

La fel ca şi înainte, se va considera că pe piață cotează un număr de „*n*” active cu risc (acțiuni).

Pentru fiecare activ se cunoaşte:

- Rentabilitatea aşteptată: $E(R_k) = \mu_k ; k = \overline{1,n}$
- Riscul, măsurat prin abaterea medie pătratică: $\sigma_k ; k = \overline{1,n}$
- Coeficienții de covarianță a fiecărui activ cu celelalte active: $\sigma_{kj};\ k, j = \overline{1,n}, k \neq j$

Cu ajutorul coeficienților de varianță ($\sigma_k^{\ 2} = \sigma_{kk}$) şi al celor de covarianță se formează matricea de varianță-covarianță:

$\Omega = (\sigma_{kj})_{n \times n}$

Vom face observația că în cazul în care în locul coeficienților de covarianță σ_{kj} se dau coeficienții de corelație $\rho_{kj}\left(k, j = \overline{1,n}\right)$, atunci cu ajutorul acestora se formează matricea

$$M = (\rho_{kj})_{n \times n} \tag{71}$$

iar matricea de varianță-covarianță se scrie:

$$\Omega = S \times M \times S \tag{72}$$

unde S este matricea diagonală:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{73}$$

Vom face observația că:

$$\Omega^{-1} = S^{-1} \times M^{-1} \times S^{-1} \tag{74}$$

Matricea *S* se inversează ușor, respectiv:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} \tag{75}$$

Întrucât matricea S este întotdeauna inversabilă, pentru ca matricea Ω să fie inversabilă este necesar ca matricea M să fie inversabilă.

Anterior s-a demonstrat că orice portofoliu eficient (optim Pareto) P de rentabilitate R_p (fixată exogen) are următoarea structură (vezi formula (52)):

$$x_p = \frac{1}{D}\left[\left(A \cdot R_p - B\right)\Omega^{-1}\mu + \left(C - R_p \cdot B\right)\Omega^{-1}e\right] \tag{76}$$

Notațiile utilizate sunt următoarele:

$$\begin{aligned} &\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots\dots, \mu_n)^T \\ &e = (1,1,\dots\dots,1)^T \\ &A = e^T \Omega^{-1} e \\ &B = e^T \Omega^{-1} \mu \\ &C = \mu^T \Omega^{-1} \mu \\ &D = AC - B^2 \end{aligned} \tag{77}$$

Se observă că μ şi e sunt vectori coloană cu n componente, iar A, B, C şi D sunt scalari (numere).

Dacă matricea Ω^{-1} este pozitiv-definită atunci avem:

$A > 0$ şi $B > 0$ **(78)**

iar din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz rezultă:

$D = AC - B^2 > 0$ **(79)**

Din formula (76) rezultă că în cazul în care se cunosc elementele de structură a pieței de capital: Ω^{-1}, A, B, C şi D, pentru fiecare mărime a rentabilității R_p a portofoliului stabilită în mod exogen de către investitor, se poate calcula vectorul de structură x_p a portofoliului eficient. Acest portofoliul asigură obținerea rentabilității R_p cu cel mai mic risc (σ_p) posibil.

Conform formulei (54), pentru orice portofoliul eficient relația dintre rentabilitatea R_p și varianța acestuia $\sigma_p{}^2$ este dată de relația:

$$\sigma_p{}^2 = \frac{1}{D}\left[A \cdot R_p{}^2 - 2 \cdot B \cdot R_p + C\right] \qquad \textbf{(80)}$$

Întrucât discriminantul trinomului din membrul drept al formulei (80) este

$\Delta = B^2 - AC < 0$

iar $A > 0$, rezultă că acest trinom este pozitiv, oricare ar fi rentabilitatea R_p.

În sistemul de coordonate (σ_p, R_p) din planul financiar, formula (80) reprezintă o **<u>hiperbolă</u>**. Într-adevăr, formula (80) se mai poate scrie, succesiv:

$$\sigma_p{}^2 = \frac{A}{D}\left[R_p{}^2 - 2\frac{B}{A}R_p + \frac{C}{A}\right]$$

$$\sigma_p{}^2 = \frac{A}{D}\left[\left(R_p - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right]$$

$$\sigma_p{}^2 = \frac{A}{D}\left[\left(R_p - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{D}{A^2}\right]$$

$$\sigma_p{}^2 = \frac{A}{D}\left(R_p - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{A} \qquad \textbf{(81)}$$

respectiv:

$$\frac{\sigma_p{}^2}{\frac{1}{A}} - \frac{\left(R_p - \frac{B}{A}\right)^2}{\frac{D}{A^2}} = 1 \qquad \textbf{(82)}$$

care reprezintă forma canonică a unei hiperbole.

Din formula (81) rezultă:

$$R_p = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{D}{A}} \cdot \sqrt{\sigma_p{}^2 - \frac{1}{A}} \qquad \textbf{(83)}$$

Este evident că dintre cele două formule (83), din punct de vedere al interpretării financiare are semnificație numai aceea cu semnul plus, respectiv:

$$R_p = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{D}{A}} \cdot \sqrt{\sigma_p{}^2 - \frac{1}{A}} \qquad \textbf{(84)}$$

Formula (84), valabilă pentru $\sigma_p \geq \frac{1}{\sqrt{A}}$, furnizează pentru orice portofoliu eficient mărimea rentabilității R_p în funcție de riscul σ_p asumat.

Pentru orice portofoliu eficient variația rentabilității în funcție de riscul σ_p asumat este dată de formula:

$$\frac{\partial R_P}{\partial \sigma_P} = \sqrt{\frac{D}{A}} \cdot \frac{\sigma_P}{\sqrt{\sigma_p^{\ 2} - \frac{1}{A}}} \tag{85}$$

Se observă că:

$$\frac{\partial R_P}{\partial \sigma_P} > 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 R_P}{\partial \sigma_P^{\ 2}} < 0 \tag{86}$$

Din formulele (86) rezultă că funcția (84) care dă valoarea R_p a rentabilității unui portofoliu eficient în funcție de riscul asumat σ_p este o funcție crescătoare şi concavă. Cu alte cuvinte, pentru orice portofoliu eficient unui risc mai mare îi corespunde şi o rentabilitate R_p mai mare, sporul de rentabilitate fiind însă o funcție descrescătoare.

Ținând seama de faptul că derivata unei funcții reprezintă, din punct de vedere geometric panta tangentei dusă la graficul funcției în punctul respectiv, rezultă că ecuația tangentei dusă în punctul (σ_p, R_p) la hiperbola (82), respectiv (84) care reprezintă frontiera Markowitz (frontiera portofoliilor eficiente) va fi:

$$R - R_P = \sqrt{\frac{D}{A}} \cdot \frac{\sigma_P}{\sqrt{\sigma_p^{\ 2} - \frac{1}{A}}} \left(\sigma - \sigma_P\right) \tag{87}$$

Tangenta (87) va intersecta axa verticală (de risc zero) în punctul:

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ R = R_P - \dfrac{1}{A}\sqrt{\dfrac{D}{A}} \cdot \dfrac{\sigma_p^{\ 2}}{\sqrt{\sigma_p^{\ 2} - \frac{1}{A}}} \end{cases} \tag{88}$$

Ținând seama de formula (84), rezultă:

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ R = \dfrac{B}{A} - \dfrac{1}{A}\sqrt{\dfrac{D}{A}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{{\sigma_p}^2 - \dfrac{1}{A}}} \end{cases} \qquad \textbf{(88')}$$

Pentru a vedea poziția punctului (σ_p, R_p) de pe frontiera Markowitz din care tangenta dusă trece prin origine, vom lua $R = 0$.

Rezultă:

$${\sigma_p}^2 = \frac{C}{B^2}$$

iar din formula (84) rezultă:

$$R_P = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{D}{A}}\sqrt{\frac{C}{B^2} - \frac{1}{A}} = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{D}{A}}\sqrt{\frac{D}{AB^2}}$$

$$R_P = \frac{C}{B}$$

Aşadar portofoliul având caracteristicile:

$$W: \begin{cases} {\sigma_W}^2 = \dfrac{C}{B^2} \\ R_W = \dfrac{C}{B} \end{cases} \qquad \textbf{(89)}$$

are proprietatea că tangenta dusă la hiperbolă (frontiera Markowitz) în punctul respectiv trece prin originea axelor de coordonate.

Vârful ramurii (84) a hiperbolei (82), respectiv (83) are caracteristicile:

$$V : \begin{cases} \sigma_V{}^2 = \dfrac{1}{A} \\ R_V = \dfrac{B}{A} \end{cases} \qquad \textbf{(90)}$$

şi este acelaşi cu portofoliul de risc minim global descris de (58).

Din (85) mai rezultă că:

$$\lim_{\sigma_P \to \infty} \frac{\partial R_P}{\partial \sigma_P} = \sqrt{\frac{D}{A}} \qquad \textbf{(91)}$$

şi deci ecuația asimptotei dusă la ramura (84) a frontierei Markowitz este:

$$R - \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{D}{A}}\sigma \qquad \textbf{(92)}$$

Pentru a putea trasa cât mai exact hiperbola (83), vom calcula şi coordonatele punctului în care aceasta intersectează axa orizontală ($R_p = 0$). Evident că axa orizontală este intersectată de ramura:

$$R_P = \frac{B}{A} - \sqrt{\frac{D}{A}}\sqrt{\sigma_p{}^2 - \frac{1}{A}}$$

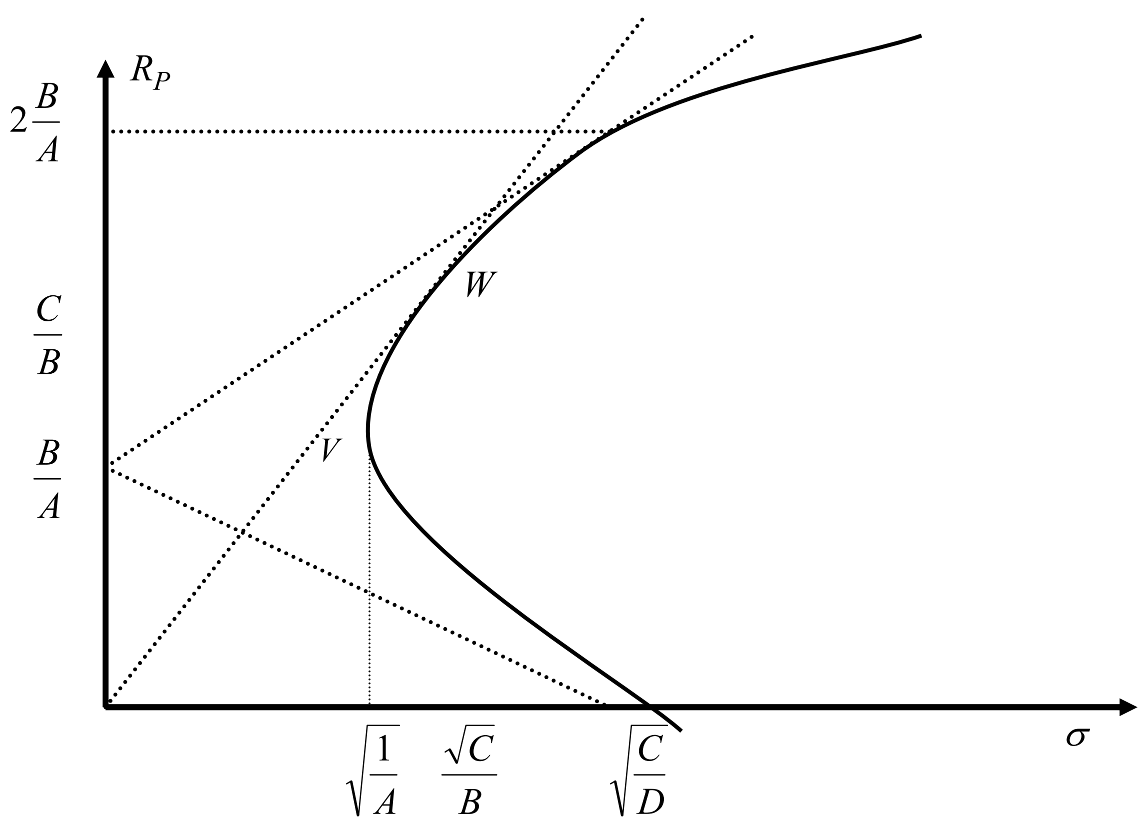
Făcând $R_p = 0$ rezultă:

$$\sigma_p{}^2 = \frac{C}{D} \qquad \textbf{(93)}$$

Făcând în (84) $\sigma_p{}^2 = \dfrac{C}{D}$, rezultă:

$$R_P = 2\frac{B}{A} = 2R_V \tag{94}$$

Cu alte cuvinte portofoliul eficient care corespunde pe ramura superioară a hiperbolei punctului în care ramura inferioară a hiperbolei intersectează axa orizontală corespunde unei rentabilități egale cu dublul rentabilității corespunzătoare vârfului (portofoliul corespunzător celui mai mic risc posibil).



8. Teorema celor două portofolii fundamentale (fonduri mutuale) (II)

În cazul în care rentabilitatea portofoliului eficient (R_p) este fixată, structura acestuia este dată de formula (76).

Pentru portofoliul V, conform (90) avem $R_V = \frac{B}{A}$, iar structura acestuia, conform formulei (76), va fi:

$$x_V = \frac{1}{D}\left(C - \frac{B}{A}B\right)\Omega^{-1}e$$

respectiv:

$$x_V = \frac{1}{A}\Omega^{-1}e \qquad \textbf{(95)}$$

Pentru portofoliul W, conform (89), avem $R_W = \frac{C}{B}$, iar structura acestuia va fi:

$$x_W = \frac{1}{B}\Omega^{-1}\mu \qquad \textbf{(96)}$$

Aşa cum s-a arătat anterior, orice portofoliu eficient P poate fi exprimat astfel (vezi formula (61)):

$$x_p = \lambda_p \cdot x_V + \left(1 - \lambda_p\right) \cdot x_W \qquad \textbf{(97)}$$

unde parametrul λ este dat de formula (vezi formula (65)):

$$\lambda_P = \frac{A}{D}\left[C - B \cdot R_P\right] \qquad \textbf{(98)}$$

Formulele (97) şi (98) arată că în cazul în care un investitor doreşte să-şi asigure o rentabilitate (aşteptată) R_p este suficient să investească o pondere $\lambda_p = \frac{A}{D}\left[C - B \cdot R_p\right]$ din totalul investiției în fondul mutual (portofoliul) V şi o pondere $1 - \lambda_p = \frac{B}{D}\left[A \cdot R_p - B\right]$ în fondul mutual (portofoliul) W.

Modalitatea de investire reprezentată mai sus este realizabilă numai în cazul pe piață există fondurile mutuale V şi W care asigură rentabilitățile $\frac{B}{A}$, respectiv $\frac{C}{B}$.

Vom presupune că pe piață nu funcționează fondurile mutuale V şi W, în schimb există alte două fonduri mutuale H şi G cu rentabilitățile aşteptate R_H, respectiv R_G. Întrucât orice fond mutual este un portofoliu eficient, conform formulei (97), putem scrie:

$$x_H = \lambda_H \cdot x_V + \left(1 - \lambda_H\right) \cdot x_W$$
$$x_G = \lambda_G \cdot x_V + \left(1 - \lambda_G\right) \cdot x_W \qquad \textbf{(99)}$$

unde:

$$\lambda_H = \frac{A}{D}\left[C - B \cdot R_H\right]$$
$$\lambda_G = \frac{A}{D}\left[C - B \cdot R_G\right] \qquad \textbf{(100)}$$

Vom arăta că, pentru a obține o rentabilitate aşteptată R_p, investitorul trebuie să investească o pondere *k* din totalul investiției în fondul mutual H şi o pondere (1-*k*) în fondul mutual G. Într-adevăr avem:

$$x_p = k \cdot x_H + \left(1 - k\right) \cdot x_G \qquad \textbf{(101)}$$

Ținând seama de (99), avem:

$$x_p = k \cdot \left[\lambda_H x_V + \left(1-\lambda_H\right) \cdot x_W\right] + \left(1-k\right) \cdot \left[\lambda_G \cdot x_V + \left(1-\lambda_G\right) \cdot x_W\right] = \\ = \left[k\lambda_H + \left(1-k\right)\lambda_G\right]x_V + \left[k\left(1-\lambda_H\right) + \left(1-k\right)\left(1-\lambda_G\right)\right]x_W \quad \textbf{(102)}$$

Dacă se notează:

$$l = k\lambda_H + \left(1-k\right)\lambda_G \quad \textbf{(103)}$$

atunci (102) se poate scrie:

$$x_p = l \cdot x_V + \left(1-l\right) \cdot x_W \quad \textbf{(104)}$$

Conform formulei (98) avem:

$$l = \frac{A}{D}\left[C - B \cdot R_P\right] \quad \textbf{(105)}$$

Din (103) rezultă:

$$k = \frac{l - \lambda_G}{\lambda_H - \lambda_G} \quad \textbf{(106)}$$

Ținând seama de formulele (100) şi (105), din (106) rezultă:

$$k = \frac{R_G - R_p}{R_G - R_H} \quad \textbf{(107)}$$

Rezultă că pentru a obține o rentabilitate (aşteptată) de R_p, investitorul trebuie să investească o pondere egală cu $\frac{R_G - R_p}{R_G - R_H}$ din totalul investiției în fondul mutual H şi o pondere egală cu $\frac{R_p - R_H}{R_G - R_H}$ în fondul mutual G.

9. Aplicație

Vom presupune că pe piață cotează un număr de trei active. Matricea-diagonală a coeficienților de risc este:

$$S = \begin{pmatrix} 0.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 \end{pmatrix}$$

iar matricea coeficienților de corelație este:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -0.40 & 0.25 \\ -0.40 & 1 & -0.60 \\ 0.25 & -0.60 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea de varianță-covarianță, conform formulei (72) va fi:

$$\Omega = S \times M \times S = \begin{pmatrix} 0.0576 & -0.0134 & 0.0108 \\ -0.0134 & 0.0196 & -0.0151 \\ 0.0108 & -0.0151 & 0.0324 \end{pmatrix}$$

Inversa matricii de varianță-covarianță este:

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 20.6718 & 13.8427 & -0.4307 \\ 13.8427 & 88.9891 & 36.9140 \\ -0.4307 & 36.9140 & 48.2343 \end{pmatrix}$$

<u>Observație importantă:</u>

Pentru aplicațiile de calcul matricial se recomandă utilizarea programelor MATHCAD sau MATLAB. Evident că pentru matrici de dimensiuni reduse se pot utiliza şi calculatoarele de „buzunar”.

Vectorul coeficienților de rentabilitate este:

$$\mu = (0.170 \ \ 0.110 \, 0.145)^T$$

Vectorul *e* este:

$$e = (1\ 1\ 1)^T$$

Vom nota cu A_1, respectiv B_1 vectorii:

$$A_1 = \Omega^{-1} e$$

$$B_1 = \Omega^{-1} \mu$$

Avem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 34.0839 \\ 139.7458 \\ 84.7176 \end{pmatrix} ; \ B_1 = \begin{pmatrix} 4.9745 \\ 17.4946 \\ 10.9813 \end{pmatrix}$$

cu ajutorul vectorilor A_1 şi B_1 vom calcula:

$$A = e^T A_1 = 258.5473$$

$$M = (\rho_{kj})_{n \times n}$$

$$C = \mu^T B_1 = 4.3624$$

$$D = AC - B^2 = 8.9482$$

Portofoliile fundamentale sunt:

- Portofoliul eficient cu cel mai mic risc global (vârful hiperbolei portofoliilor eficiente):

$$x_V = \frac{1}{A} A_1 = \begin{pmatrix} 0.1318 \\ 0.5405 \\ 0.3277 \end{pmatrix}$$

având riscul:

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{A}} = 6.22\%$$

şi rentabilitatea:

$$R_V = \frac{B}{A} = 12.94\%$$

- Portofoliul W (care are proprietatea că tangenta dusă la hiperbolă prin punctul (σ_W, R_W) trece prin originea axelor de coordonate):

$$x_W = \begin{pmatrix} 0.1487 \\ 0.5230 \\ 0.3283 \end{pmatrix}$$

având riscul:

$$\sigma_W = \frac{\sqrt{C}}{B} = 6.24\%$$

şi rentabilitatea:

$$R_W = 13.04\%$$

Vom presupune acum că un investitor doreşte să-şi formeze un portofoliu care să-i asigure o rentabilitate aşteptată de $R_p = 15.40\%$.

Conform formulelor (97) şi (98), portofoliul x_p care asigură rentabilitatea $R_p = 15.40\%$ va fi:

$$x_p = \lambda_p \cdot x_V + \left(1 - \lambda_p\right) \cdot x_W$$

unde:

$$\lambda_p = \frac{A \cdot B}{D}\left[R_W - R_p\right],$$

iar

$$1 - \lambda_p = \frac{B}{D}\left[A \cdot R_p - B\right] = \frac{A \cdot B}{D}\left[R_p - \frac{B}{A}\right] = \frac{A \cdot D}{D}\left[R_p - R_V\right]$$

Efectuând calculele rezultă:

$\lambda_1 = -22.7971$ şi $\lambda_2 = 23.7971$

Rezultă că

$$x_p = \begin{pmatrix} 0.5336 \\ 0.1240 \\ 0.3424 \end{pmatrix}$$

Riscul corespunzător portofoliului P este:

$$\sigma_P = \sqrt{x_P{}^T \cdot \Omega \cdot x_P} = 14.62\%$$

Acest risc poate fi calculat şi cu ajutorul formulei (80)

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{D}} \sqrt{A \cdot R_p{}^2 - 2B \cdot R_p + C}$$

obţinându-se acelaşi rezultat

Aşadar, pentru a obţine o rentabilitate de 15,40% investitorul trebuie să cumpere 23,7971 unităţi din fondul mutual W şi vinde (short-selling) 22,7971 unităţi din fondul mutual V.

Vom presupune acum că pe piaţă funcţionează două fonduri mutuale (portofolii eficiente) G şi H având rentabilităţile aşteptate $\underline{R_G = 14\%}$, respectiv $\underline{R_H = 16.5\%}$.

Structura celor două portofolii, calculate pe baza formulelor (97) şi (98) sunt:

$$x_G = \begin{pmatrix} 0.3052 \\ 0.3608 \\ 0.3340 \end{pmatrix};\ \lambda_G = -9.2661;\ 1-\lambda_G = 10.2661 \text{ şi } \sigma_G = 8.44\%$$

$$x_H = \begin{pmatrix} 0.7131 \\ -0.0621 \\ 0.3490 \end{pmatrix};\ \lambda_H = -33.4287;\ 1-\lambda_H = 34.4287 \text{ şi } \sigma_H = 20.13\%$$

Aplicând formulele (101) şi (107) avem:

$$x_p = k \cdot x_H + (1-k) \cdot x_G$$

$$k = \frac{R_G - R_p}{R_G - R_H} = \frac{0.14 - 0.154}{0.14 - 0.165} = 0.56$$

Rezultă:

$$x_p = 0.56 \cdot x_H + 0.44 \cdot x_G$$

Aşadar, de această dată investitorul îşi va asigura rentabilitatea dorită cumpărând 0,64 unităţi din fondul mutual H şi 0,36 unităţi din fondul mutual G.

10. Covarianța dintre două portofolii eficiente. Portofolii conjugate.

Fie x_A şi x_B două portofolii eficiente[1].

Conform celor stabilite, cele două portofolii se pot exprima în funcție de portofoliile x_V şi x_W astfel:

$$x_A = \lambda_A \cdot x_V + (1-\lambda_A) \cdot x_W$$

$$x_B = \lambda_B \cdot x_V + (1-\lambda_B) \cdot x_W$$

Covarianța dintre ele este:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(x_A, x_B) &= x_A{}^T \Omega \cdot x_B = \left[\lambda_A \cdot x_V + (1-\lambda_A) \cdot x_W\right]^T \cdot \Omega \cdot \left[\lambda_B \cdot x_V + (1-\lambda_B) \cdot x_W\right] = \\ &= \lambda_A \cdot \lambda_B \cdot x_V{}^T \Omega \cdot x_V + \lambda_B (1-\lambda_A) x_W{}^T \Omega \cdot x_V + \lambda_A (1-\lambda_B) x_V{}^T \Omega \cdot x_W + (1-\lambda_A)(1-\lambda_B) x_W{}^T \Omega \cdot x_W \end{aligned} \quad \textbf{(108)}$$

Se ştie că:

$$\begin{aligned} x_V{}^T \Omega \cdot x_V &= \sigma_V{}^2 = \frac{1}{A} \\ x_V{}^T \Omega \cdot x_W &= x_W{}^T \Omega \cdot x_V = \frac{1}{A} \\ x_W{}^T \Omega \cdot x_W &= \sigma_W{}^2 = \frac{C}{B^2} \end{aligned} \quad \textbf{(109)}$$

Ținând seama de (109), formula (108) devine:

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \left[\lambda_A \cdot \lambda_B + \lambda_B (1-\lambda_A) + \lambda_A (1-\lambda_B)\right] \cdot \frac{1}{A} + (1-\lambda_A)(1-\lambda_B) \cdot \frac{C}{B^2}$$

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \left[\lambda_A + \lambda_B - \lambda_A \lambda_B\right] \cdot \frac{1}{A} + (1-\lambda_A)(1-\lambda_B) \cdot \frac{C}{B^2}$$

---

[1] Indicii A şi B care însoțesc pe *x*, nu au nici o legătură cu numerele A şi B definite anterior.

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \frac{1}{A} + (1-\lambda_A)(1-\lambda_B)\left[\frac{C}{B^2} - \frac{1}{A}\right].$$

de unde:

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \frac{1}{A} + (1-\lambda_A)(1-\lambda_B)\frac{D}{AB^2} \qquad \textbf{(110)}$$

Se ştie că (formula 98):

$$\lambda_A = \frac{A}{D}(C - BR_P)$$

respectiv:

$$1-\lambda_A = \frac{B}{D}[A \cdot R_A - B] = \frac{AB}{D}\left[R_A - \frac{B}{A}\right]$$

şi deci:

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \frac{1}{A} + \frac{A^2B^2}{D^2}\left[R_A - \frac{B}{A}\right]\left[R_B - \frac{B}{A}\right]\frac{D}{AB^2}$$

Rezultă:

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \frac{1}{A} + \frac{A}{D}\left[R_A - \frac{B}{A}\right]\left[R_B - \frac{B}{A}\right] \qquad \textbf{(111)}$$

Se ştie că:

$$R_V = \frac{B}{A}$$

de unde:

$$\operatorname{cov}(x_A, x_B) = \frac{1}{A} + \frac{A}{D}[R_A - R_V][R_B - R_V] \qquad \textbf{(112)}$$

Din formula (112) se observă că pentru două portofolii A şi B pentru care $R_A > R_V$ şi $R_B > R_V$, respectiv punctele (σ_A, R_A) şi (σ_B, R_B) sunt situate pe ramura superioară a hiperbolei (vezi formula (84)) care descrie frontiera Markowitz, $\operatorname{cov}(x_A, x_B) > 0$.

Fie acum portofoliul P fixat, cu $R_P > R_V$. Vom căuta portofoliul Z astfel încât:

$$\operatorname{cov}(x_P, x_Z) = 0 \tag{113}$$

Este evident că pentru portofoliul Z vom avea:

$$R_Z < R_V \tag{114}$$

Cu alte cuvinte, portofoliul Z va fi situat pe ramura inferioară a hiperbolei, respectiv pe ramura (vezi formula (83)):

$$R = \frac{B}{A} - \sqrt{\frac{D}{A}}\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{A}} \tag{115}$$

Avem:

$$\operatorname{cov}(x_P, x_Z) = \frac{1}{A} + \frac{A}{D}[R_P - R_V][R_Z - R_V]$$

Rezultă:

$$R_Z = R_V - \frac{D}{A^2}\frac{1}{R_P - R_V}$$

respectiv:

$$R_Z = \frac{B}{A} - \frac{D}{A^2}\frac{1}{R_P - \frac{B}{A}} = \frac{B}{A} - \frac{D}{A} \cdot \frac{1}{AR_P - B}$$

Rezultă:

$$R_Z = \frac{A \cdot B \cdot R_P - B^2 - D}{A[AR_P - B]} = \frac{A \cdot B \cdot R_P - B^2 - A \cdot C + B^2}{A[AR_P - B]}$$

Şi deci:

$$R_Z = \frac{B \cdot R_P - C}{AR_P - B} \tag{116}$$

Portofoliul Z a cărui rentabilitate este dată de formula (116) **se numeşte conjugatul portofoliului P**.

Vom observa că formula (116) se mai poate scrie:

$$R_Z = \frac{B}{A} \frac{R_P - \frac{C}{B}}{R_P - \frac{B}{A}}$$

respectiv:

$$R_Z = R_V \frac{R_P - R_W}{R_P - R_V} \tag{117}$$

11. Un model de evaluare a activelor financiare.

Modelul ce va fi analizat în acest paragraf permite evaluarea rentabilității oricărui activ în funcție de rentabilitatea unui portofoliu „etalon” P şi al conjugatului său Z.

Pentru început vom evalua diferența:

$$R_P - R_Z = R_P - \frac{B \cdot R_P - C}{AR_P - B} = \frac{AR_P{}^2 - 2B \cdot R_P + C}{AR_P - B}$$

Ținând seama de formula (80), rezultă:

$$R_P - R_Z = \frac{D\sigma_P{}^2}{AR_P - B}$$

respectiv:

$$\frac{AR_P - B}{D} = \frac{\sigma_P{}^2}{R_P - R_Z} \qquad \textbf{(118)}$$

Pe de altă parte, întrucât formulei (31) covarianța dintre un activ k şi portofoliul P în care el este inclus este dată de formula:

$$\sigma_{kP} = x_1 \cdot \sigma_{k1} + x_2 \cdot \sigma_{k2} + \ldots\ldots + x_n \cdot \sigma_{kn} \qquad \textbf{(119)}$$

rezultă că vectorul $\Omega \cdot x_p$ are drept componente coeficienții de covarianță $\sigma_{kP}, k = \overline{1,n}$ dintre active şi portofoliul P.

Utilizând formula (76) avem:

$$\Omega \cdot x_p = \Omega \cdot \frac{1}{D}\left[\left(A \cdot R_p - B\right)\Omega^{-1}\mu + \left(C - R_p \cdot B\right)\Omega^{-1}e\right]$$

de unde avem succesiv:

$$\Omega \cdot x_p = \frac{1}{D}\left[\left(A \cdot R_p - B\right)\mu + \left(C - R_p \cdot B\right)e\right]$$

$$\Omega \cdot x_p = \frac{A \cdot R_p - B}{D}\left[\mu + \frac{(C - R_p \cdot B)}{A \cdot R_p - B} e\right]$$

Ținând seama de formula (116) rezultă:

$$\Omega \cdot x_p = \frac{A \cdot R_p - B}{D}[\mu - R_Z \cdot e]$$

Ținând seama şi de formula (118) rezultă:

$$\Omega \cdot x_p = \frac{\sigma_p{}^2}{R_P - R_Z}[\mu - R_Z \cdot e]$$

sau, în sfârşit:

$$\mu = R_Z \cdot e + \frac{\Omega \cdot x_p}{\sigma_p{}^2}(R_P - R_Z) \qquad \textbf{(120)}$$

Formula (120) reprezintă forma vectorială a unui model de evaluare a activelor financiare.

Vom nota vectorul:

$$\frac{\Omega \cdot x_p}{\sigma_p{}^2} = BETA \qquad \textbf{(121)}$$

Cu notația (121), modelul (120) se scrie:

$$\mu = R_Z \cdot e + BETA\ (R_P - R_Z) \qquad \textbf{(122)}$$

Scriind ecuația (122) pe componente avem:

$$\mu_k = R_Z + \beta_k (R_P - R_Z), k = \overline{1,n} \qquad \textbf{(123)}$$

Întrucât $\mu_k = E(R_k)$, iar R_P şi R_Z sunt în fapt rentabilitățile aşteptate, ecuația (123) se mai poate scrie:

$$E(R_k) = E(R_Z) + \beta_k [E(R_P) - E(R_Z)], k = \overline{1,n} \qquad \textbf{(124)}$$

unde, conform (121) avem:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{kP}}{\sigma_P{}^2} \tag{125}$$

Parametrul β_k **se numeşte coeficientul de volatilitate al activului k în raport cu portofoliul-etalon P**.

Expresia:

$$E(R_P) - E(R_Z) = PR \tag{126}$$

reprezintă o **primă de risc**.

Rezultă că formula (124) arată că:

„**Rentabilitatea (aşteptată) a oricărui activ k trebuie să fie egală cu rentabilitatea portofoliului-conjugat Z la care se adaugă prima de risc multiplicată cu coeficientul β_k de volatilitate a activului**"

La rândul său coeficientul de volatilitate β_k se obține conform formulei (125), raportând coeficientul de covarianță σ_{kP} a activului *k* cu portofoliul P la varianța portofoliului P, $\sigma_P{}^2$.

Prin convenție activele *k* pentru care $\beta_k > 1$ se numesc active „agresive".

Coeficientul de volatilitate a unui portofoliu Q având structura x_Q este:

$$\beta_Q = \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + ... + \beta_n \cdot x_n \tag{127}$$

unde $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt componentele vectorului x_Q.

Vom observa că coeficientul de volatilitate a portofoliului „etalon" P este:

$$\beta_P = 1 \tag{128}$$

Într-adevăr, din (122), înmulțind la stânga cu vectorul-linie x^T obținem:

$$x^T \cdot \mu = R_Z \cdot x^T \cdot e + x^T \cdot BETA[R_P - R_Z] \tag{129}$$

Ținând seama că:

$$x^T \cdot \mu = R_P$$

$$x^T \cdot BETA = \beta_P$$

şi

$$x^T \cdot e = 1$$

rezultă:

$$R_P = R_Z + \beta_P\left[R_P - R_Z\right]$$

sau

$$\beta_P = 1$$

ceea ce trebuie demonstrat.

În mod asemănător se demonstrează că:

$$\beta_Z = 0 \qquad \textbf{(130)}$$

Observații importante:

1. Modelul fundamental (124) permite evaluarea activelor pornind de la un portofoliu-etalon P. În această situație, este evident că volatilitățile β_k depind de modul de alegere a portofoliului-etalon P.
2. Fie x_Q vectorul de structură a unui portofoliu eficient Q. Din formula (121):

$$\frac{{x_Q}^T \cdot \Omega \cdot x_p}{{\sigma_p}^2} = {x_Q}^T \cdot BETA = \beta_Q$$

unde β_Q este volatilitatea portofoliului Q.

Aplicând formula (111) rezultă:

$$\beta_Q = \frac{\operatorname{cov}(x_P, x_Q)}{\operatorname{var}(x_P)} = \frac{\frac{1}{A} + \frac{A}{D}\left[R_P - \frac{B}{A}\right]\left[R_Q - \frac{B}{A}\right]}{\frac{1}{A} + \frac{A}{D}\left[R_P - \frac{B}{A}\right]^2} \qquad \textbf{(131)}$$

Formula (131) permite calculul rapid al volatilității unui portofoliu Q. În cazul în care se cunosc rentabilitățile (aşteptate) R_P şi R_Q.

Din formula (131) se vede uşor că:

$\beta_P = 1$ şi $\beta_Z = 0$ deoarece $\operatorname{cov}(x_P, x_Q) = 0$.

Tot din formula (131) rezultă că $\beta_V = \dfrac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{A} + \frac{A}{D}\left[R_P - \frac{B}{A}\right]^2}$ (deoarece $R_V = \dfrac{B}{A}$),

iar pentru portofoliile situate pe ramura inferioară a hiperbolei avem $\beta_Q < \beta_V$, deoarece în acest caz $R_Q < R_V = \dfrac{B}{A}$.

De asemenea, din (131) se vede că cu cât un portofoliu Q are o rentabilitate mai mare, cu atât volatilitatea lui va fi mai mare.

12. Aplicație.

Vom considera aceleaşi date folosite în acest capitol. Drept portofoliu-etalon P vom considera portofoliul de rentabilitate $E(R_p)=15\%$.

Aplicând formula (76) obținem structura portofoliului-etalon:

$$x_p = \begin{pmatrix} 0.4683 \\ 0.1917 \\ 0.3400 \end{pmatrix}$$

Riscul portofoliului P este $\sigma_P = 12.71\%$.

Conform formulei (116) rentabilitatea portofoliului-conjugat va fi:

$R_Z = 12.29\%$

Vectorul de covarianță va fi:

$$\Omega \cdot x_P = \begin{pmatrix} 0.0281 \\ -0.0077 \\ 0.0132 \end{pmatrix}$$

Ştiind că varianța lui P este ${\sigma_P}^2 = 0.0162$.

Conform formulei (121) vectorul BETA va fi:

$$BETA = \frac{\Omega \cdot x_p}{{\sigma_P}^2} = \begin{pmatrix} 1.7376 \\ -0.4753 \\ 0.8156 \end{pmatrix}$$

respectiv:

$\beta_1 = 1.7376$; $\beta_2 = -0.4753$ şi $\beta_3 = 0.8156$

Prima de risc este:

$E(R_P) - E(R_Z) = 0.15 - 0.1229 = 2.71\%$

Vom presupune acum că un investitor doreşte să-şi formeze un portofoliu eficient, asumându-şi un risc $\sigma_Q = 14\%$. Conform formulei (84) rentabilitatea portofoliului va fi $R_Q = 15.58\%$.

Aplicând formula (52) obținem structura portofoliului:

$$x_Q = \begin{pmatrix} 0.5628 \\ 0.0937 \\ 0.3435 \end{pmatrix}$$

Volatilitatea portofoliului Q va fi:

$$\beta_Q = x_Q^T \cdot BETA = 1.2136$$

Rezultă că în raport cu portofoliul etalon P a cărui rentabilitate este $E(R_P) = 15\%$ şi volatilitate $\beta_P = 1$, portofoliul Q a cărui rentabilitate este $E(R_Q) = 15.58\%$ are coeficientul de volatilitate cu 21,36% mai mare.

TEORIA PORTOFOLIULUI

Capitolul II – Portofilii optime. Dreapta fundamentală a pieței de capital – Capital Market Line (CML)

1. Introducere

În paragraful 5 al capitolului precedent s-a prezentat un model de evaluare a activelor pornind de la un portofoliu eficient P si de la conjugatul său Z_p. Este evident că acest model de evaluare este un model „subiectiv'', deoarece fiecare investitor poate alege un anume portofoliu eficient P, şi astfel sa obțină propriul său model de evaluare a activelor de pe piață.

În acest capitol se va arăta că există un model de evaluare „obiectiv'' pe care-l folosesc toți operatorii de pe piață. Acesta este modelul CAPM fundamentat în anul 1964 de către W. Sharpe, laureat al Premiului Nobel pe anul 1989 (împreună cu H. Markowitz şi H. Miller).Trebuie menționat că independent de W. Sharpe, la concluzii asemănătoare au ajuns, tot în anul 1964, şi J.Lintner, precum şi J. Mossin.

2. Frontiera portofoliilor eficiente pentru cazul în care pe piață există şi un activ fără risc.

În acest paragraf se va presupune că pe piață există un activ al cărui randament R_f este cert şi al cărui risc este zero. Pentru aceasta ne putem gândi la un plasament în bonuri de tezaur sau în o casă de economii, ale cărei depozite sunt garantate de stat. Nu se va lua în calcul problema inflației care poate eroda valoarea investiției.

Ca şi în capitolele precedente, vom presupune că investitorii au un comportament de tip Markowitz, respectiv care să asigure o rentabilitate dată:

$$E(R_P) = \rho \qquad \textbf{(1)}$$

cu un risc minim:

$$\sigma_P = \text{minim} \qquad \textbf{(2)}$$

Notând ca şi în capitolele precedente cu $x_k, k = \overline{1,n}$ mărimea investiției în activul cu risc(acțiunea) k raportată la totalul investiției şi cu x_0 ponderea investiției în activul fără risc, avem:

$$x_0 = 1 - (x_1 + x_2 + ... + x_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \textbf{(3)}$$

Modelul de programare pe care trebuie să-l soluționeze investitorul este:

$$\begin{cases} \min \dfrac{1}{2}\sigma_P^{\;2} = \min \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{kj}x_k x_j \\ \sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k x_k + \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)R_f = \rho \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Ca şi în capitolele precedente, cu σ_{kj} s-a notat covarianța dintre activele cu risc *k* şi *j*, iar cu $\mu_k = E(R_k)$ s-a notat rentabilitatea aşteptată a activului *k*.

Modelul (4) se mai poate scrie:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}\sigma_P{}^2 = \min \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k{}^2 x_k{}^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\sigma_k\sigma_j x_k x_j \\ \sum_{k=1}^{n}(\mu_k - R_f)x_k = \rho - R_f \end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

Lagrangeanul sistemului este:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k{}^2 x_k{}^2 + \sum_{k=1}^{n}x_k\sigma_k \sum_{j=k+1}^{n}\sigma_j x_j - \lambda\left[\sum_{k=1}^{n}(\mu_k - R_f)x_k - (\rho - R_f)\right] \quad \textbf{(6)}$$

Cu λ s-a notat multiplicatorul Lagrange.

Condițiile necesare de optim sunt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, k = \overline{1,n} \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{aligned} \quad \textbf{(7)}$$

Se demonstrează că aceste condiții reprezintă şi condiții suficiente de optim.

Ținând seama de (6), condițiile de optim devin:

$$\sigma_k{}^2 x_k + \sigma_k \sum_{j=k+1}^{n}\sigma_j x_j = \lambda(\mu_k - R_f), k = 1 \div n \quad \textbf{(8)}$$

Cele n condiții (8), desfăşurat se scriu:

$$\begin{aligned} &\sigma_1^{\ 2} x_1 + \sigma_{12} x_2 + \ldots\ldots + \sigma_{1n} x_n = \lambda\left(\mu_1 - R_f\right) \\ &\sigma_{21} x_1 + \sigma_2^{\ 2} x_2 + \ldots\ldots + \sigma_{2n} x_n = \lambda\left(\mu_2 - R_f\right) \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\sigma_{n1} x_1 + \sigma_{n2} x_2 + \ldots\ldots + \sigma_n^{\ 2} x_n = \lambda\left(\mu_n - R_f\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

Utilizând notațiile deja introduse în capitolele precedente, sistemul (9) matricial se scrie astfel:

$$\Omega \cdot x = \lambda\left(\mu - R_f \cdot e\right) \qquad \textbf{(10)}$$

unde:

$\Omega = \left(\sigma_{ij}\right)_{n \times n}$ este matricea de varianță-covarianță;

$x = \left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\right)^T$

$\mu = \left(\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n\right)^T$

$e = \left(1, 1, \ldots\ldots, 1\right)^T$

Cu alte cuvinte, x reprezintă vectorul-coloană al ponderilor investițiilor în active cu risc, iar μ vectorul coloană al rentabilităților aşteptate ale activelor cu risc. Cu e s-a notat, ca şi până acum, un vector coloană cu n componente, având toate componentele egale cu unu.

Ca şi până acum, se va presupune că matricea de varianță-covarianță Ω este inversabilă $\left(\det \Omega \neq 0\right)$.

Din relația (10) rezultă:

$$x = \lambda \cdot \Omega^{-1}\left(\mu - R_f \cdot e\right) \qquad \textbf{(11)}$$

A doua relație din (5), se poate scrie vectorial astfel:

$$\left(\mu - R_f \cdot e\right)^T x = \rho - R_f \qquad \textbf{(12)}$$

Ținând seama de relația (11), relația (12) devine:

$$\lambda\left[\mu - R_f \cdot e\right]^T \Omega^{-1}\left[\mu - R_f \cdot e\right] = \rho - R_f \qquad \textbf{(13)}$$

Avem:

$$\lambda = \frac{\rho - R_f}{\left[\mu - R_f \cdot e\right]^T \Omega^{-1}\left[\mu - R_f \cdot e\right]} \qquad \textbf{(14)}$$

Prin calcul rezultă:

$$\left[\mu - R_f \cdot e\right]^T \Omega^{-1}\left[\mu - R_f \cdot e\right] = \mu^T \Omega^{-1}\mu + {R_f}^2 e^T \Omega^{-1} e - 2\mu^T \Omega^{-1} e \cdot R_f \qquad \textbf{(15)}$$

S-a ținut seama că matricea Ω^{-1} este simetrică şi deci:

$$\mu^T \Omega^{-1} e = e^T \Omega^{-1}\mu \qquad \textbf{(16)}$$

Ținând seama că în capitolele precedente s-a notat:

$$\begin{aligned} A &= e^T \Omega^{-1} e \\ B &= e^T \Omega^{-1}\mu \end{aligned} \qquad \textbf{(17)}$$

$$C = \mu^T \Omega^{-1} \mu$$

avem:

$$\lambda \left[\mu - R_f \cdot e \right]^T \Omega^{-1} \left[\mu - R_f \cdot e \right] = A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C \qquad \textbf{(15')}$$

Relația (14) se scrie:

$$\lambda = \frac{\rho - R_f}{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(18)}$$

sau:

$$\lambda = \frac{E(R_P) - R_f}{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(18')}$$

Ținând seama de relația (18), vectorul de structură x (structura pe active cu risc a portofoliului) se scrie (vezi (11)):

$$x = \frac{\rho - R_f}{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \Omega^{-1} \left[\mu - R_f \cdot e \right] \qquad \textbf{(19)}$$

Ținând seama că ponderea investițiilor în activul fără risc este:

$$x_0 = 1 - e^T x \qquad \textbf{(3')}$$

rezultă:

$$x_0 = 1 - \frac{\rho - R_f}{A \cdot R_f^2 - 2B \cdot R_f + C} e^T \Omega^{-1} \left[\mu - R_f \cdot e \right]$$

de unde:

$$x_0 = 1 - \frac{(\rho - R_f)(B - A \cdot R_f)}{A \cdot R_f^2 - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(20)}$$

Ținând seama de (19), varianța portofoliului se scrie:

$$\sigma_P^2 = x^T \cdot \Omega \cdot x = \left(\frac{\rho - R_f}{A \cdot R_f^2 - 2B \cdot R_f + C} \right)^2 \left[(\mu - R_f \cdot e)^T \cdot \left(\Omega^{-1}\right)^T \right] \cdot \Omega \cdot \left[\Omega^{-1 \cdot} (\mu - R_f \cdot e) \right]$$

$$\sigma_P^2 = x^T \cdot \Omega \cdot x = \left(\frac{\rho - R_f}{A \cdot R_f^2 - 2B \cdot R_f + C} \right)^2 (\mu - R_f \cdot e)^T \cdot \left(\Omega^{-1}\right)^T (\mu - R_f \cdot e)$$

Ținând seama de (15') rezultă:

$$\sigma_P^2 = \frac{(\rho - R_f)^2}{A \cdot R_f^2 - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(21)}$$

Din (21) rezultă:

$$\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{A \cdot R_f^2 - 2B \cdot R_f + C}} (\rho - R_f) \qquad \textbf{(22)}$$

sau

$$\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}} \times \left[E(R_P) - R_f\right] \qquad \textbf{(22')}$$

Formula (22') pune în evidență faptul că între riscul unui portofoliu şi excesul de rentabilitate $E(R_P) - R_f$ a portofoliului în raport cu rentabilitatea activului fără risc există o relație liniară (de proporționalitate), coeficientul de proporționalitate fiind constant:

$$\frac{1}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}} \qquad \textbf{(23)}$$

Relația (22) se mai poate scrie:

$$\rho - R_f = \sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \times \sigma_P \qquad \textbf{(24)}$$

respectiv:

$$E(R_P) = R_f + \sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \times \sigma_P \qquad \textbf{(25)}$$

Din (24) mai rezultă:

$$\sigma_P = \frac{(\rho - R_f)}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}} \qquad \textbf{(26)}$$

Ținând seama de (26) relația (19) devine:

$$x = \frac{1}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}} \times \sigma_P \times \Omega^{-1}\left[\mu - R_f \cdot e\right] \qquad \textbf{(27)}$$

Formula (27) permite calculul structurii portofoliului în funcție de riscul asumat σ_P.

3. Dreapta fundamentală a pieței de capital (CML – Capital Market Line).

Din formula (25) rezultă faptul că oricare ar fi două portofolii eficiente P şi Q avem:

$$\frac{E(R_P)-R_f}{\sigma_P}=\frac{E(R_Q)-R_f}{\sigma_Q}=\sqrt{A\cdot R_f^{\,2}-2B\cdot R_f+C}$$

de unde:

$$E(R_P)=R_f+\frac{E(R_Q)-R_f}{\sigma_Q}\times\sigma_P \qquad \textbf{(28)}$$

Expresia:

$$\frac{E(R_Q)-R_f}{\sigma_Q} \qquad \textbf{(29)}$$

Reprezintă **<u>prima de risc a portofoliului Q</u>**. Rezultă că formula (28) exprimă rentabilitatea portofoliului eficient P în funcție de rentabilitatea fără risc R_f, de riscul portofoliului σ_P şi de prima de risc a portofoliului Q.

Structura unui portofoliu eficient P este conform (19) şi (20) următoarea:

$$x=\frac{\rho-R_f}{A\cdot R_f^{\,2}-2B\cdot R_f+C}\Omega^{-1}\left[\mu-R_f\cdot e\right]$$

$$x_0=1-\frac{(\rho-R_f)(B-A\cdot R_f)}{A\cdot R_f^{\,2}-2B\cdot R_f+C} \qquad \textbf{(30)}$$

<u>Definiție:</u> **<u>Un portofoliu eficient (30) se numeşte portofoliul pieței şi se notează cu M dacă ponderea activelor fără risc este zero, respectiv $x_0=0$. Portofoliul pieței va fi notat cu M.</u>**

Vom observa că dacă $x_0 = 0$ rezultă:

$$1 - \frac{(\rho - R_f)(B - A \cdot R_f)}{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} = 0$$

de unde:

$$\rho - R_f = E(R_M) - R_f = \frac{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}{B - A \cdot R_f} \qquad \textbf{(31)}$$

Din prima relație din (30) rezultă că structura portofoliului pieței este:

$$x_M = \frac{1}{B - A \cdot R_f} \Omega^{-1} \left[\mu - R_f \cdot e \right] \qquad \textbf{(32)}$$

iar rentabilitatea sa este:

$$\mu^T \cdot x_M = \frac{1}{B - A \cdot R_f} \cdot \Omega^{-1} \left[\mu^T \cdot \Omega^{-1} \cdot \mu - R_f \cdot \mu^T \cdot \Omega^{-1} \cdot e \right]$$

respectiv

$$E(R_M) = \mu^T \cdot x_M = \frac{C - B \cdot R_f}{B - A \cdot R_f} \qquad \textbf{(33)}$$

Din (33) rezultă:

$$E(R_M) - R_f = \frac{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}{B - A \cdot R_f},$$

iar din (22) rezultă că riscul portofoliului pieței este:

$$\sigma_M = \frac{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}}{B - A \cdot R_f} \qquad \textbf{(34)}$$

Centralizând rezultatele avem:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{B - A \cdot R_f} \Omega^{-1} \left[\mu - R_f \cdot e \right] \\ E(R_M) = \dfrac{C - B \cdot R_f}{B - A \cdot R_f} \\ \sigma_M = \dfrac{\sqrt{A \cdot R_f^{\,2} - 2B \cdot R_f + C}}{B - A \cdot R_f} \end{cases} \tag{35}$$

În cazul în care în formula (28) vom înlocui portofoliul Q cu portofoliul pieței M, obținem:

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \sigma_P \tag{36}$$

Formula (36) reprezintă **ecuația dreptei fundamentale a pieței de capital (CML)**.

Vom arăta că dreapta CML este tangentă la frontiera Markowitz în punctul de coordonate $\left(E(R_M), \sigma_M \right)$.

Într-adevăr, conform celor arătate în capitolul precedent (formula 85), panta tangentei la frontiera Markowitz în punctul M este:

$$\frac{\partial E(R_M)}{\partial \sigma_M} = \sqrt{\frac{D}{A}} \frac{\sigma_M}{\sqrt{\sigma_M^{\,2} - \dfrac{1}{A}}} \tag{37}$$

Avem:

$$\sigma_M^{\,2} - \frac{1}{A} = \frac{A \cdot R_f^{\,2} - 2B \cdot R_f + C}{\left(B - A \cdot R_f \right)^2} - 1 = \sqrt{\frac{D}{A}} \cdot \frac{1}{B - A \cdot R_f}$$

şi deci

$$\frac{\partial E(R_M)}{\partial \sigma_M} = \sqrt{\frac{D}{A}} \frac{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}}{B - A \cdot R_f} \cdot \frac{B - A \cdot R_f}{\sqrt{\frac{D}{A}}}$$

de unde:

$$\frac{\partial E(R_M)}{\partial \sigma_M} = \sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(38)}$$

Pe de altă parte avem:

$$E(R_M) - R_f = \frac{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}{B - A \cdot R_f}$$

de unde:

$$\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} = \frac{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}{B - A \cdot R_f} \times \frac{B - A \cdot R_f}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}}$$

şi deci:

$$\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} = \sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(39)}$$

Comparând (38) cu (39) rezultă că

$$\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} = \frac{\partial E(R_M)}{\partial \sigma_M} \qquad \textbf{(40)}$$

şi deci dreapta (36) este tangentă la frontiera Markowitz în punctul M.

Se observă că dreapta (36) trece prin punctul $(0, R_f)$, de unde concluzia:

„Dreapta CML este tangenta la frontiera Markowitz dusă prin punctul de coordonate $(0, R_f)$. Această dreaptă trece prin punctul M (portofoliul pieței)”

O altă observaţie importantă priveşte structura unui portofoliu situat pe dreapta CML.

Din formula (27), care dă structura activelor cu risc în portofoliu:

$$x_P = \frac{1}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}} \sigma_P \cdot \Omega^{-1}\left[\mu - R_f \cdot e\right] \qquad \textbf{(41)}$$

rezultă:

$$x_P = \frac{B - A \cdot R_f}{\sqrt{A \cdot R_f^{\ 2} - 2B \cdot R_f + C}} \times \sigma_P \times \frac{1}{B - A \cdot R_f} \cdot \Omega^{-1}\left[\mu - R_f \cdot e\right]$$

Ținând seama de prima şi a treia formulă din (35) rezultă:

$$x_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} x_M \qquad \textbf{(42)}$$

Formula (42) arată că vectorul x_P (ponderea activelor cu risc în portofoliul P) este proporțional cu vectorul x_M, coeficientul de proporționalitate fiind $\frac{\sigma_P}{\sigma_M}$.

Pentru a calcula ponderea activului fără risc în portofoliul P vom porni de la relația (3'). Avem:

$$x_0 = 1 - e^T x_P = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M} e^T x_M = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M} \qquad \textbf{(43)}$$

deoarece $e^T x_M = 1$.

Aşadar, rezultă următoarea concluzie:

„Un investitor care doreşte să-şi formeze un portofoliu P situat pe dreapta fundamentală a pieței de capital (CML) şi care-şi asumă un risc σ_P urmează a investi o pondere egală cu $\frac{\sigma_P}{\sigma_M}$ în portofoliul pieței şi o pondere

egală cu $1-\frac{\sigma_P}{\sigma_M}$ în activul fără risc. El va obține o rentabilitate egală cu cea dată de formula (36)".

În vederea aplicării teoremei celor două fonduri mutuale pentru portofoliul pieței M (capitolul I, paragraful 8) vom observa că prima formulă din (35) se mai poate scrie:

$$x_M = \frac{B}{B - A \cdot R_f} \cdot \left(\frac{1}{B}\Omega^{-1}\mu\right) + \left(-\frac{AR_f}{B - A \cdot R_f}\right) \cdot \left(\frac{1}{A}\Omega^{-1}e\right)$$

Notăm cu:

$$\lambda_M = -\frac{AR_f}{B - A \cdot R_f} \qquad \textbf{(44)}$$

formula de mai sus se scrie:

$$x_M = \lambda_M \cdot x_V + (1 - \lambda_M) \cdot x_W \qquad \textbf{(45)}$$

unde portofoliile x_V şi x_W sunt cele definite în capitolul precedent (formulele (95) şi (96)).

Rezultă că, dacă investitorul nu găseşte pe piață un fond mutual care să aibă structura portofoliului pieței, el va putea investi în fondurile mutuale x_V şi x_W, alegând ponderea λ_M, respectiv $1-\lambda_M$, unde λ_M este dat de formula (44). Aşa cum s-a arătat în paragraful 8 din capitolul precedent, dacă nici fondurile mutuale x_V şi x_W nu sunt disponibile pe piață, investitorul poate investi în oricare două fonduri mutuale x_G şi x_H alegând ponderile corespunzătoare cu formula (106) din capitolul precedent.

4. Optimalitatea portofoliilor situate pe CML.

În acest paragraf vom presupune că orice investitor rațional este caracterizat de o funcție de utilitate de forma:

$$U = U\left(E\left(R_P\right), \sigma_P{}^2\right) \qquad \textbf{(45)}$$

având următoarele proprietăți:

a) $\dfrac{\partial U}{\partial E\left(R_P\right)} > 0; \qquad \dfrac{\partial U}{\partial \sigma_P{}^2} < 0$ **(46)**

b) funcția U este concavă în ansamblul argumentelor.

Funcția de utilitate U arată modul în care investitorul percepe raportul dintre rentabilitatea şi riscul unui portofoliu.

Notând cu k o constantă oarecare, ecuația

$$U\left(E\left(R_P\right), \sigma_P{}^2\right) = k \qquad \textbf{(47)}$$

reprezintă o izocuantă în planul financiar din figura 1

O izocuantă este formată din totalitatea portofoliilor, respectiv a punctelor de coordonate care asigură investitorului aceeaşi utilitate. În figura 1 sunt reprezentate mai multe izocuante ale funcției U.

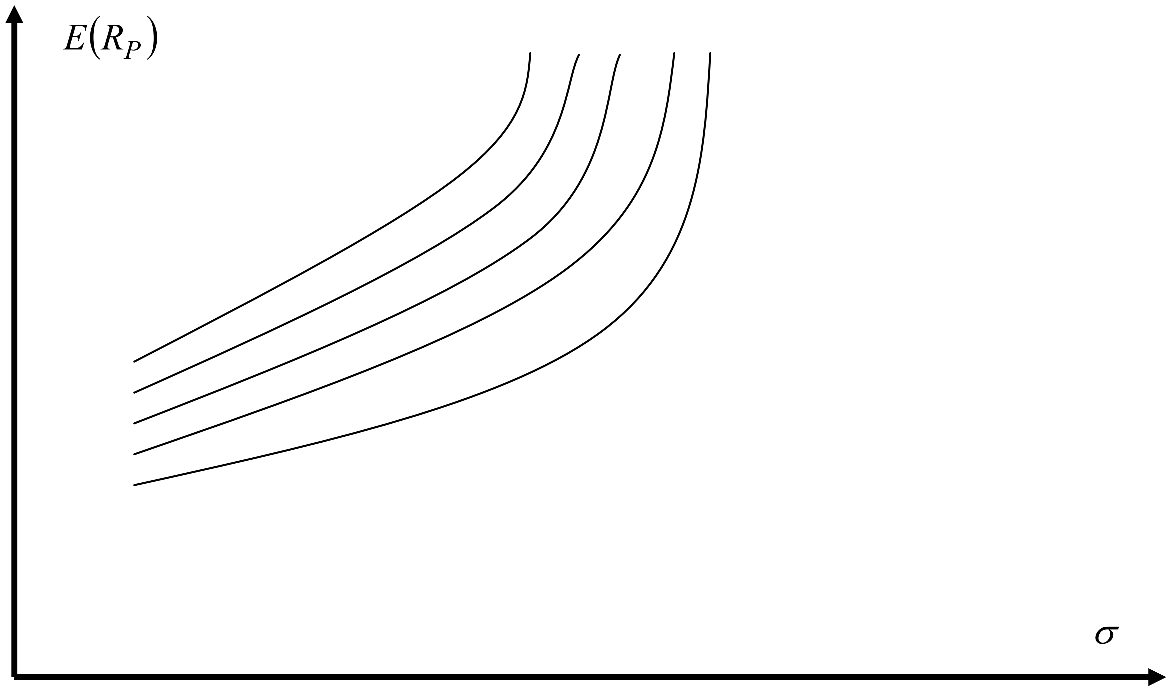
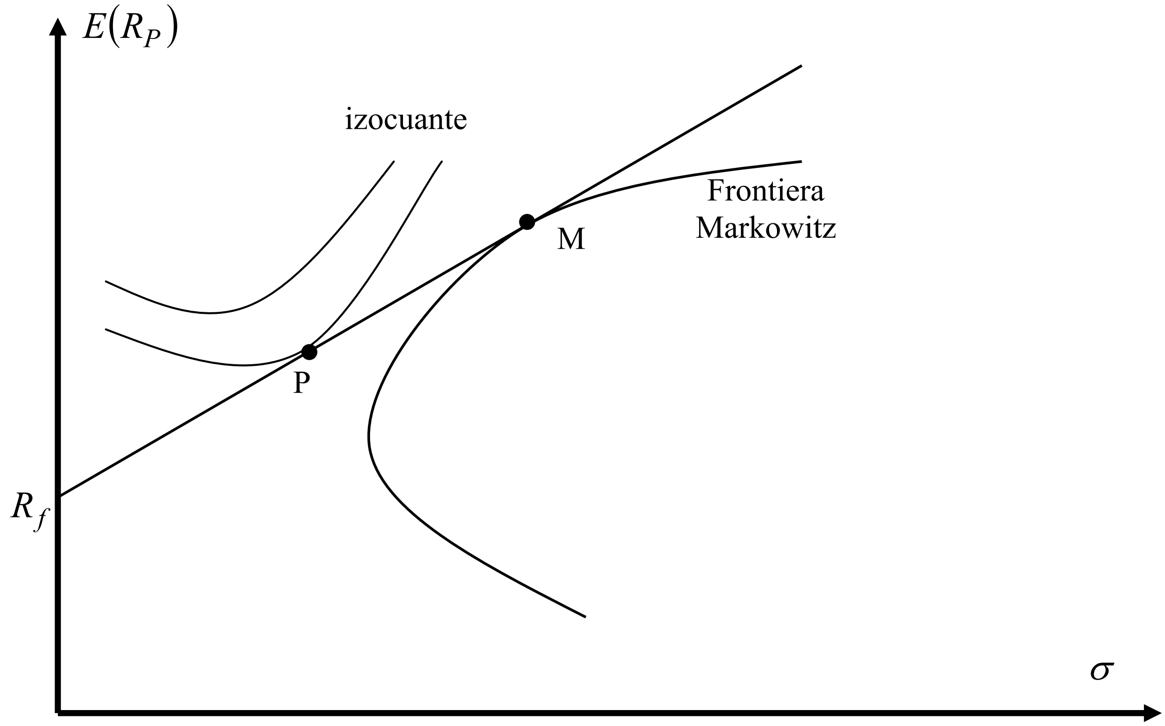


Figura 1

În acest cadru problema de optim a unui investitor este:

$$\begin{cases} \max U\left(E(R_P), \sigma_P{}^2\right) \\ \sigma_P{}^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{kj} x_k x_j \\ E(R_P) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu_k + \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right) R_f \end{cases} \qquad \textbf{(48)}$$

Vom arăta că portofoliul optim pentru orice investitor, care reprezintă soluția problemei (48), se află în punctul de tangență al izocuantelor funcției U cu dreapta CML (fig. 2).



Figură 2

Într-adevăr, condițiile necesare de optim pentru problema (48) sunt:

$$\frac{\partial U}{\partial E(R_P)}\frac{\partial E(R_P)}{\partial x_k}+\frac{\partial U}{\partial \sigma_P{}^2}\frac{\partial \sigma_P{}^2}{\partial x_k}=0,\ k=\overline{1,n} \qquad \textbf{(49)}$$

sau

$$\frac{\partial \sigma_P{}^2}{\partial x_k}=\left(-\frac{\partial U}{\partial E(R_P)}\Big/\frac{\partial U}{\partial \sigma_P{}^2}\right)\cdot\frac{\partial E(R_P)}{\partial x_k},\ k=\overline{1,n} \qquad \textbf{(50)}$$

În formulele (50) valorile derivatelor sunt calculate în punctul de optim.

Întrucât raportul dat de cele două derivate este o constantă corespunzând valorilor derivatelor în punctul de optim, vom nota:

$$\lambda = -\frac{\partial U}{\partial E(R_P)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial \sigma_P{}^2} > 0 \qquad \textbf{(51)}$$

În acest caz, sistemul (50) devine:

$$\frac{\partial \sigma_P{}^2}{\partial x_k} = \lambda \cdot \frac{\partial E(R_P)}{\partial x_k}, \; k = \overline{1,n} \qquad \textbf{(52)}$$

Este uşor de arătat că sistemul (52) este identic cu sistemul (9). În această situație rezultă că soluția problemei (48) este, la fel ca şi în cazul problemei (4), dată de relațiile (19) şi (20).

În ceea ce priveşte coeficientul de substituire:

$$\lambda = -\frac{\partial U}{\partial E(R_P)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial \sigma_P{}^2} \qquad \textbf{(53)}$$

Valoarea acestuia va fi dată de relația (18), respectiv:

$$-\frac{\partial U}{\partial E(R_P)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial \sigma_P{}^2} = \frac{E(R_P) - R_f}{A \cdot R_f{}^2 - 2B \cdot R_f + C} \qquad \textbf{(54)}$$

Înlocuind în (54), conform relației (22'):

$$\sigma_P = \frac{1}{\sqrt{A \cdot R_f{}^2 - 2B \cdot R_f + C}} \times \left[E(R_P) - R_f\right]$$

ecuația (52) are o singură necunoscută, respectiv pe $\rho = E(R_P)$.

Calculând pe $\rho = E(R_P)$ rezultat din ecuația (54) şi înlocuind în relațiile (19) şi (20), soluția problemei de optim (48) este complet determinată.

Conform celor demonstrate în paragraful precedent soluția problemei de optim (48) se va afla pe dreapta fundamentală a pieței de capital (CML), ceea ce trebuia demonstrat.

5. Aplicație.

Vom presupune că matricea de varianță-covarianță este aceeaşi ca şi în aplicațiile precedente:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0,0576 & -0,0134 & 0,0108 \\ -0,0134 & 0,0196 & -0,0151 \\ 0,0108 & -0,0151 & 0,0324 \end{pmatrix}$$

iar vectorul rentabilităților este:

$$\mu = (0,170 \quad 0,110 \quad 0,1450)^T$$

După cum s-a mai calculat, avem:

$$A = 258,5473$$
$$B = 33,4504$$
$$C = 4,3624$$
$$D = 8,9482$$

Vom presupune acum că rentabilitatea activului fără risc este:

$$R_f = 10\%$$

Aplicând formulele (35) rezultă că **portofoliul pieței M** are următoarea structură:

$$x = (0.2062 \quad 0.4634 \quad 0.3304)^T$$

Cu alte cuvinte portofoliul pieței are în componența sa $x_1 = 20.62\%$ din activul unu, $x_1 = 46.34\%$ din activul doi şi $x_1 = 33.04\%$ din activul trei.

Rentabilitatea portofoliului pieței este:

$$E(R_M) = 13.39\%$$

iar riscul acestuia este:

$$\sigma_M = 6.68\%$$

Ecuația dreptei fundamentale a pieței de capital este (CML) este, conform formulei (34), următoarea:

$$E(R_P) = 0.10 + \frac{0.1339 - 0.10}{0.0668}\sigma_P$$

respectiv:

$$E(R_P) = 0.10 + 0.5077 \cdot \sigma_P$$

Vom presupune că un investitor doreşte să-şi asume un risc de

$$\sigma_P = 5.50\%$$

În acest caz, rentabilitatea portofoliului P care va situat pe CLM este:

$$E(R_P) = 12.79\%$$

iar structura sa va fi:

$$x_P = \frac{\sigma_P}{\sigma_M} x = \begin{pmatrix} 0.1697 & 0.3813 & 0.2719 \end{pmatrix}$$

iar ponderea investiției în activul fără risc este:

$$x_0 = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_M} = 17.71\%$$

În cazul în care investitorul doreşte să-şi asume un risc egal cu $\sigma_P = 9\%$, atunci portofoliul său va fi:

$$x_P = \begin{pmatrix} 0.2776 & 0.6240 & 0.4449 \end{pmatrix}$$

iar investiția în activul fără risc va fi:

$x_0 = -0.3465 = -34.65\%$ (short selling)

Rentabilitatea noului portofoliu va fi:

$$E(R_P) = 14.57\%$$

TEORIA PORTOFOLIULUI

Capitolul III – Modelul CAPM (Capital Assets Pricing Model)

În acest capitol va fi analizat modul de formare a cursului de echilibru pe o piață financiară. La baza analizei va sta modelul CAPM.

1. Echilibrul pieței financiare

Modelul CAPM permite evaluarea activelor financiare pe o piață în echilibru.

Echilibrul pieței financiare se caracterizează astfel:

E1: cursul fiecărei acțiuni se stabileşte astfel încât cererea să fie egală cu oferta

E2: fiecare agent se află într-o situație de optim, respectiv el deține un portofoliu optim.

În continuare va fi pusă în evidență relația dintre rentabilitate şi risc, pe de o parte, şi echilibru, pe de altă parte.

Modelul CAPM porneşte de la admiterea următoarelor ipoteze:

A. Ipoteze cu privire la piața financiară

A1. Piața financiară este perfectă.

A2. Modelul CAPM se referă la o piață financiară ce funcționează pe u orizont de timp determinat (modelul CAPM este un model static).

Ipoteza A1 implică următoarele elemente:

1. Piața este de tip concurențial.
2. Titlurile financiare sunt perfect divizibile.
3. Operatorii de pe piață au acces nelimitat la informațiile financiare.
4. Costurile pentru obținerea informațiilor sunt nule.
5. Cursurile de echilibru reflectă întreaga informație existentă pe piață.

6. Pe piață cotează active cu risc (acțiuni) şi active fără risc (bonuri de tezaur, etc.)
7. Rentabilitatea activului fără risc este egală cu rata dobânzii pe piața monetară. Rata activă a dobânzii este egală cu rata pasivă a dobânzii.
8. Reglementările pieței permit operații de tip short-selling.
9. Costurile de tranzacții bursiere sunt nule.

B. <u>Ipoteze cu privire la operatorii de pe piața financiară</u>

B1. Operatorii au un comportament optimal de tip Markowitz.

B2. Operatorii au acelaşi tip de anticipări (anticipările sunt omogene). Toți operatorii de pe piață au aceleaşi anticipări cu privire la rentabilitățile şi riscul activelor financiare, precum şi cu privvire la covarianța dintre acestea.

Ipoteza B2 se referă la informația perfectă pe piața financiară .

Aşa cum s-a arătat în Capitolul II, pe frontiera portofoliilor eficiente (frontiera Markowitz) se evidențiază un portofoliu special denumit portofoliul pieței M, având următoarea structură (vezi formula 35 din Capitolul II):

$$x_M = \frac{1}{B - AR_f}\Omega^{-1}(\mu - R_f e) \tag{1}$$

Rentabilitatea, respectiv riscul acestui portofoliu sunt:

$$E(R_M) = \frac{C - BR_f}{B - AR_f} \tag{2}$$

$$\sigma_M = \frac{\sqrt{AR_f^2 - 2BR_f + C}}{B - AR_f} \tag{3}$$

Aşa cum se vede din formulele (1) – (3), atât structura portofoliului pieței, cât şi rentabilitatea şi riscul acestuia depind în mod esențial de rentabilitatea activului fără risc, rentabilitate ce rezultă din echilibrul cererii şi al ofertei pentru acest tip de activ.

În condițiile valabilității ipotezelor de echilibru al pieței prezentate mai sus, se demonstrează următoarea proprietate importantă:

<u>„Ponderea fiecărui activ cu risc în portofoliul pieței este egală cu ponderea valorii capitalizate a activului (a firmei) în valorea capitalizată totală a pieței”.</u>

Notând cu x_k^M ponderea activului k în portofoliul pieței, conform celor de mai sus rezultă:

$$x_k^M = \frac{P_k N_k}{W}, \qquad k = \overline{1,n} \tag{4}$$

unde:

$$W = \sum_{j=1}^{n} P_j N_j \tag{5}$$

S-au utilizat următoarele notații:

P_k - cursul acțiunii k pe piață

N_k - numărul de acțiuni ale firmei k

W – valoarea capitalizată a pieței

2. Modelul CAPM

În paragraful 11 al capitolului II, s-a dedus următorul model de evaluare a activelor financiare:

$$\mu = R_z e + BETA \times (R_p - R_z) \tag{6}$$

unde:

$$BETA = \frac{\Omega X_p}{\sigma_p^2} \tag{7}$$

Modelul de evaluare (6) are la bază portofoliul eficient P (numit „portofoliu etalon”). Cu Z s-a notat portofoliul conjugat lui P.

Conform formulei (116) din capitolul I avem:

$$R_Z = \frac{BR_P - C}{AR_P - B} \tag{8}$$

Scriind modelul (6) pe componente, avem (vezi formulele 124 şi 125 din capitolul I):

$$E(R_k) = E(R_Z) + \beta_k[E(R_P) - E(R_Z)], \quad \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}} \tag{9}$$

unde coeficientul de volatilitate β_k este dat de formula:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{kP}}{\sigma_P^2}, \quad k = \overline{1,n} \tag{10}$$

Vom considera în continuare ca portofoliu etalon portofoliul pieței M.

Ținând seama de formulele 2 şi 8, rezultă:

$$R_Z = \frac{BE(R_M) - C}{AE(R_M) - B}$$

unde:

$$E(R_M) = \frac{C - BR_f}{B - AR_f}$$

Efectuând calculele rezultă:

$$R_Z = R_f$$

Cu acestea modelul CAPM devine (vezi formulele (6) şi (7)):

$$\mu = R_f e + BETA \times [E(R_M) - R_f] \tag{11}$$

unde:

$$BETA = \frac{\Omega \cdot x_M}{\sigma_M^2} \tag{12}$$

Pe componente avem:

$$E(R_k) = R_f + \beta_k \cdot [E(R_M) - R_f], \quad \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}} \tag{13}$$

unde:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M^2}, \quad \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}} \tag{14}$$

Coeficientul de volatilitate β_k reprezintă o măsură a **risculului sistematic** al activului k.

În sistemul de axe de coordonate ($\beta, E(R_k)$), ecuația (13) reprezintă grafic o dreaptă, numită **dreapta fundamentală a activelor financiare** **(SML – Securities Market Line)** – vezi fig.1.

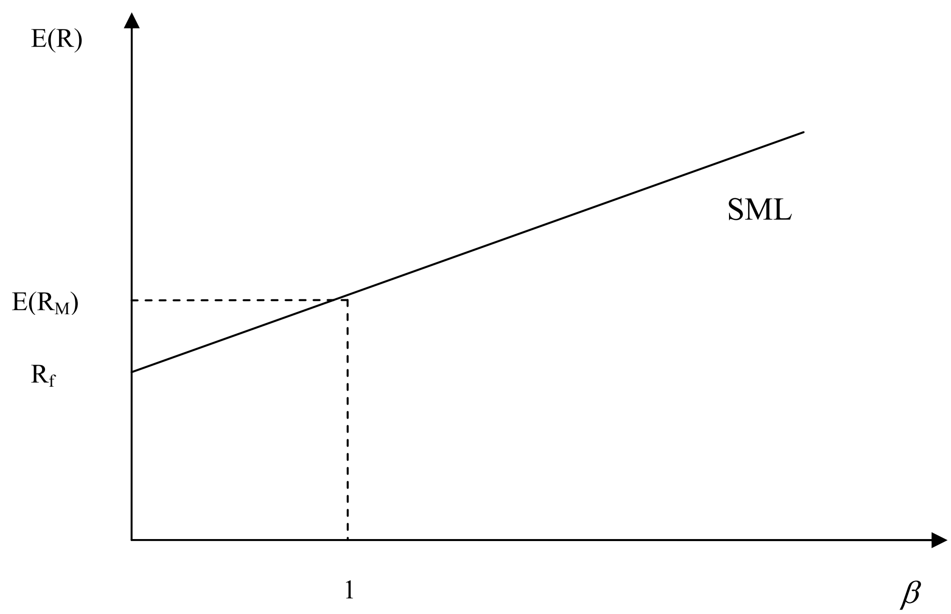


fig.1

Ținând seama că:

$$\sigma_{kM} = \sigma_k \cdot \sigma_M \cdot \rho_{kM} \tag{15}$$

unde ρ_{kM} este coeficientul de corelație dintre activul k şi portofoliul pieței M.

Ținând seama de (15), relația (14) se scrie:

$$\beta_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_M} \rho_{kM} \tag{16}$$

Ținând seama de de (16), modelul CAPM (13) se scrie:

$$E(R_k) = R_f + \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \sigma_k \rho_{kM}, \quad k = \overline{1,n} \tag{17}$$

Notând cu:

$$\pi = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

Formula (17) se scrie:

$$E(R_k) = R_f + \pi \sigma_k \rho_{kM}, \quad \mathrm{k} = \overline{1, \mathrm{n}} \tag{18}$$

Mărimea π reprezintă **prima de risc**.

Din formula (18) rezultă că, pentru fiecare activ, prima de risc este proporțională cu $\sigma_k \rho_{kM} \leq \sigma_k$, şi nu cu întregul risc σ_k al activului.

Prima de risc va fi proporțională cu întregul risc σ_k numai pentru acele active care au coeficientul de corelație cu portofoliul pieței M egal cu 1 ($\rho_{kM} = 1$).

Vom presupune acum că rentabilitatea activului k se calculează pe baza unei ecuații de regresie:

$$R_k = a_k + b_k R_M + \varepsilon_k \tag{19}$$

unde ε_k reprezintă abateri aleatoare. Despre ε_k se va presupune că sunt normal distribuite şi:

a) $E(\varepsilon_k) = 0$

b) $\sigma_k^2 < \infty$

c) $\mathrm{cov}(R_M, \varepsilon_k) = 0$

Coeficienții a_k şi b_k se calculează utilizând metoda celor mai mici pătrate. Din statistică se ştie că:

$$b_k = \frac{\mathrm{cov}(R_M, R_k)}{\sigma_M^2} \tag{20}$$

Formula (20) pune în evidență că

$$b_k = \beta_k \tag{21}$$

Ținând seama de (21), formula (19) devine:

$$R_k = a_k + \beta_k R_M + \varepsilon_k \tag{19'}$$

Aplicând formulei (19') operatorul de varianță obținem:

$$\sigma_k^2 = \beta_k^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon k}^2 \tag{22}$$

Formula (22) pune în evidență faptul că varianța (riscul) unui activ k se poate descompune în două componente:

- Riscul sistematic: $\beta_k \sigma_M$
- Riscul nesistematic (diversificabil): $\sigma_{\varepsilon k}$

Riscul nesistematic (diversificabil) nu este plătit de o piață financiară în echilibru.

În încheierea acestui paragraf vom prezenta modul în care modelul CAPM poate fi utilizat pentru evaluarea cursului de echilibru al unei acțiuni.

Conform formulei (1) din Capitolul I avem:

$$R_k = \frac{(P_1 - P_0) + D_1}{P_0} \tag{23}$$

unde P_1 și P_0 reprezintă cursul acțiunii la momentele t = 1, respectiv t = 0, iar D_1 reprezintă mărimea dividendului.

Formula (23) se mai scrie:

$$R_k = \frac{P_1 + D_1}{P_0} - 1 \tag{24}$$

Aplicând operatorul de anticipare avem:

$$E(R_k) = \frac{1}{P_0}[E(P_1) + E(D_1)] - 1 \tag{25}$$

de unde:

$$P_0 = \frac{E(P_1) + E(D_1)}{1 + E(R_k)}$$

Ținând seama de formula (13) obținem:

$$P_0 = \frac{E(P_1) + E(D_1)}{1 + R_f + \beta_k [E(R_M) - R_f]} \tag{26}$$

Formula (26) arată că prețul de echilibru P_0 este suma dintre prețul anticipat P_1 şi dividendul anticipat, actualizat cu ajutorul coeficientului de actualizare:

$$h = \frac{1}{1 + R_f + \beta_k [E(R_M) - R_f]} \tag{27}$$

3. Aplicație:

Vom continua aplicația din capitolul precedent, unde s-a considerat că rentabilitatea activului fără risc este:

$R_f = 10\%$

Potofoliul pieței M este:

$x_M = \begin{pmatrix} 0.2062 & 0.4634 & 0.3304 \end{pmatrix}^T$

Rentabilitatea, respectiv riscul portofoliului pieții, sunt:

$E(R_M) = 13.39\%, \sigma_M = 6.68\%$

Vectorul coeficienților de covarianță dintre active şi portofoliul pieței este:

$\Omega \cdot x_M = \begin{pmatrix} 0.0092 & 0.0013 & 0.0059 \end{pmatrix}^T$

iar varianța portofoliului pieței:

$\sigma_M^2 = 0.0045$

Vectorul BETA este:

$$BETA = \frac{\Omega \cdot x_M}{\sigma_M^2} = \begin{pmatrix} 2.0628 & 0.2947 & 1.3261 \end{pmatrix}^T$$

respectiv:

$\beta_1 = 2.0628, \beta_2 = 0.2947, \beta_3 = 1.3261$

Vom presupune acum că pentru activul 1 prețul viitor anticipat este:

$E(P_1) = 110 u.m.$

iar mărimea anticipată a dividendului este

$E(D_1) = 7 u.m.$

Ştiind că volatilitatea activului 1 este $\beta_1 = 2.0628$, aplicând formula (26) rezultă următorul curs de echilibru:

$$P_0 = \frac{110+7}{1+0.10+2.0628(0.1339-0.10)} = 100.006$$

Aşadar, în condițiile date, cursul de echilibru prezent al activului 1 este 100.006. În cazul în care cursul va fi mai mare decât 100.006, va rezulta că activul este supraevaluat, şi deci operatorii vor fi interesați să vândă activul, până când cererea şi oferta vor aduce prețul activului la valoarea sa de echilibru.

Invers, dacă cursul pe piață va fi mai mic decât 100.006, va rezulta că activul este subevaluat. În această situație, operatorii de pe piață vor fi interesați să cumpere activul.

Vom presupune acum că rentabilitatea activului fără risc scade de la $R_f = 10\%$ la $R_f = 8\%$.

După cum se ştie, în acest caz se va reduce cursul tuturor activelor de pe piață.

În noua situație portofoliul pieței va fi:

$$x_M = \begin{pmatrix} 0.1671 & 0.4946 & 0.3293 \end{pmatrix}^T$$

iar rentabilitatea, respectiv riscul portofoliului pieței vor fi:

$$E(R_M) = 13.21\%, \sigma_M = 6.39\%$$

Coeficienții de volatilitate vor fi:

$$\beta_1 = 1.7278, \beta_2 = 0.5759, \beta_3 = 1.2479$$

Presupunând că anticipările pentru prețul viitor, respectiv pentru dividendul activului 1 sunt aceleaşi ca mai sus, respectiv $E(P_1) = 110u.m., E(D_1) = 7u.m.$, aplicarea formulei (26) arată că:

$$P_0 = \frac{110+7}{1+0.08+1.7278(0.1321-0.08)} = 99.99$$

TEORIA PORTOFOLIULUI

Capitolul IV - Obligațiuni

Obligațiunile ocupă o pondere importantă pe piețele de capital dezvoltate, iar rentabilitatea acestora depăşeşte adesea rentabilitatea acțiunilor.

În portofoliul de active financiare al unor investitori instituționali obligațiunile dețin o pondere foarte mare. Printre acestea menționăm în primul rând fondurile private de pensii, instituțiile de asigurări, ş.a.

Deşi obligațiunile sunt numite adesea "active fără risc", ele au cel puțin două tipuri de risc, respectiv:

- riscul de rată a dobânzii;
- riscul de rentabilitate;

În plus, obligațiunile corporative au şi aşa numitul risc de faliment, respectiv riscul ca emitentul să nu poată să-şi onoreze obligațiile asumate atunci când a făcut emisiunea de obligațiuni.

În cadrul acesui capitol vor fi abordate următoarele probleme:

1. Modul de evaluare a unei obligațiuni;
2. Tipurile de rentabilități ale unei obligațiuni care sunt importante pentru investitori;
3. Conceptul de „durată" al unei obligațiuni, modul de calcul şi factorii de care depinde mărimea acestui indicator;
4. Conceptul de „convexitate" al unei obligațiuni, modul de calcul şi factorii de care depinde mărimea acestui indicator;
5. Utilizarea duratei şi a convexității în managementul porofoliului de obligațiuni.

1. Evaluarea unei obligațiuni

Vom utiliza următoarele notații:

F - valoarea nominală a obligațiunii (în engleză **„face value”** sau **„par value”** sau **„value at maturity”);**

C_t - valoarea cuponului pentru anul t;

P - valoarea de piață a obligațiunii;

T - numărul de ani până la scadența (maturitatea) obligațiunii;

$f_{o,t}$ - valoarea estimată (aşteptată) a ratei dobânzii pentru o obligațiune emisă în anul t cu scadența peste un an;

Principiul general de evaluare al oricărui activ financiar este următorul:
„Valoarea de piață a unui activ financiar pe o piață în echilibru este egală cu valoarea actualizată a tuturor veniturilor pe care activul le generează”.

Ținând seama de cele de mai sus, se poate scrie:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{\prod_{j=1}^{t}(1+f_{0,j})} + \frac{F}{\prod_{j=1}^{T}(1+f_{0,j})} \qquad \textbf{(1)}$$

În cazul în care avem:

$$f_{0,1} = f_{0,2} = \ldots = f_{0,T} = f \qquad \textbf{(1')}$$

formula **(1)** devine:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+f)^t} + \frac{F}{(1+f)^T} \qquad \textbf{(2)}$$

Formula **(2)** reprezintă formula obişnuită de actualizare, utilizând o rată a dobânzii $r = f$.

Pentru o obligaţiune, indicatorii de rentabilitate cel mai des utilizaţi de către investitori sunt următorii:

- rentabilitatea curentă: $R_{c,t} = \dfrac{C_t}{P}$
- rentabilitatea la maturitate („**yield to maturity**”): y.

Mărimea lui y se calculează ca soluţie a ecuţiei:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^T} \tag{3}$$

Trebuie observat că deşi formulele **(2)** şi **(3)** par identice, <u>din punct de vedere financiar ele diferă fundamental</u>. În timp ce în formula **(2)** se consideră că investitorul a realizat o prognoză pentru rata dobânzii f şi pe baza acesteia calculează preţul „corect” P pe care-l poate acorda pentru obligaţiune, în formula **(3)** mărimea lui P este considerată cea dată de piaţă. Pe baza cunoaşterii preţului P, investitorul calculează necunoscuta y, respectiv rentabilitatea la scadenţă.

Rezultă că rentabilitatea la scadenţă, y, reprezintă o „rată a dobânzii” care utilizată pentru actualizare conduce la egalitatea dintre preţul plătit şi valoarea actualizată a veniturilor obţinute.

În continuare vom presupune că toate cupoanele au aceeaşi valoare, respectiv:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_T = c \cdot F \tag{4}$$

unde cu c s-a notat <u>rata cuponului.</u>

În acest caz, formula **(3)** devine:

$$P = F\left[c\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+y)^t} + \frac{1}{(1+y)^T}\right] \tag{5}$$

Ţinând seama de formula care dă suma unei progresii geometrice:

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = q\frac{1-q^n}{1-q}$$

formula **(5)** devine:

$$P = F\left[c\frac{1-v^T}{y} + v^T\right] \quad \textbf{(6)}$$

Cu v s-a notat factorul de actualizare:

$$v = \frac{1}{1+y} \quad \textbf{(7)}$$

Formula **(6)** se mai poate scrie:

$$\frac{P}{F} = \frac{c}{y}\left[1 - v^T\right] + v^T \quad \textbf{(8)}$$

Din formula **(8)** rezultă următoarele concluzii importante:

a) dacă $c = y$ atunci $P = F$, respectiv prețul este la paritate.

b) dacă $c < y$ atunci $P < F$, respectiv avem subparitate;

c) dacă $c > y$ atuci $P > F$, respectiv avem supraparitate.

În ceea ce priveşte calculul efectiv al lui y, în principiu acesta se face pe baza ecuației **(8)**, care se mai poate scrie astfel:

$$\frac{P}{F} = c\frac{1-\left(\frac{1}{1+y}\right)^T}{y} + \frac{1}{(1+y)^T} \quad \textbf{(8')}$$

După aducerea la acelaşi numitor şi dezvoltarea lui $(1+y)^T$, ecuația **(8')** devine o ecuație de gradul T. Această ecuație este, în principiu, greu de soluționat. De aceea, s-a dedus următoarea formulă care aproximează destul de bine soluția ecuației **(8')** care reprezintă rentabilitatea la scadență:

$$y = \frac{C + \dfrac{F - P}{T}}{\dfrac{F + P}{2}} \tag{9}$$

unde C este valoarea cuponului respectiv:

$$C = c \cdot F \tag{10}$$

APLICAȚII

1. Vom presupune că o obligațiune are următoarele caracteristici:

- rata cuponului: $c = 8\%$;
- scadența: $T = 10$ ani;
- valoarea nominală: 1000 u.m.

Vom presupune că prețul de piață al obligațiunii este 900 u.m.

Conform formulei **(9)** avem:

$$y = \frac{0{,}08 \cdot 1000 + \dfrac{1000 - 900}{10}}{\dfrac{1000 + 900}{2}} = \frac{80 + 10}{950} = 9{,}47\%$$

În cazul în care prețul de piață al obligațiunii este $P = 1150$, rentabilitatea la scadență devine:

$$y = \frac{0{,}08 \cdot 1000 + \dfrac{1000 - 1150}{10}}{\dfrac{1000 + 900}{2}} = 6{,}04\%$$

2. Vom presupune că un investitor are de ales dintre două obligațiuni. Caracteristicile celor două obligațiuni sunt următoarele:

Obligațiunea A:

$c = 8\%$

$T = 12$ ani

$F = 1000$ u.m.

$P = 850$ u.m.

Obligațiunea B:

$c = 7\%$

$T = 9$ ani

$F = 1000$ u.m.

$P = 900$ u.m.

Aplicând formula **(9)** rezultă:

$$y_A = \frac{80 + \frac{1000 - 850}{12}}{\frac{1000 + 850}{2}} = 10\%$$

$$y_B = \frac{70 + \frac{1000 - 900}{9}}{\frac{1000 + 900}{2}} = 8{,}54\%$$

Rezultă că pentru investitor este mai rentabil să investească în obligațiunea A, aceasta având rentabilitatea la scadență mai mare.

Trebuie menționat că formulele **(3)**, respectiv **(4)** sunt valabile în următoarele condiții:

- investitorul păstrează obligațiunea cumpărată până la scadența acesteia;
- fluxurile de venit (cupoanele) sunt reinvestite cu rentabilitatea y.

De altfel, ipotezele de mai sus sunt subînțelese în toate calculele de actualizare utilizate în domeniul finanțelor.

Din formulele utilizate rezultă că rentabilitatea la scadență depinde de:

- raportul dintre prețul de piață şi valoarea nominală a obligațiunii;
- rata cuponului;
- perioada T până la scadență.

2. Durata unei obligațiuni

Un investitor care a făcut o investiție într-o obligațiune va deține în momentul intermediar T_1 (sfârşitul anului) o valoare egală cu valoarea capitalizată a cupoanelor la care se adaugă prețul „corect" al obligațiunii pe care investitorul îl poate primi în cazul în care vinde obligațiunea. Despre momentul intermediar T_1 se presupune că $0 \le T_1 \le T$.

Notând cu V_{T_1} valoarea pe care o deține investitorul, avem:

$$V_{T_1} = W_{T_1} + P_{T_1} \tag{10}$$

unde:

$$W_{T_1} = \sum_{t=1}^{T_1} C_t (1+y)^{T_1 - t} \tag{11}$$

$$P_{T_1} = \sum_{t=1}^{T-T_1} \frac{C_{T_1+t}}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^{T-T_1}} \tag{12}$$

Presupunând că valoarea cuponului este constantă în timp, şi notând ca şi până acum cu C valoarea cuponului, formulele **(11)** şi **(12)** devin:

$$W_{T_1} = F \cdot C \sum_{t=1}^{T_1} (1+y)^t = F \cdot C \cdot \frac{1+y}{y}\left[(1+y)^{T_1} - 1\right]$$

$$P_{T_1} = F \cdot C \sum_{t=1}^{T-T_1} \frac{1}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^{T-T_1}} = F \cdot \left[C \cdot \frac{1 - v^{T-T_1}}{y} + v^{T-T_1} \right]$$

Formulele de mai sus arată că, în cazul în care rata y creşte, atunci W_{T1} creşte, în timp ce preţul de vânzare P_{T1} scade. Cu alte cuvinte, avem:

$$\frac{\partial W_{T_1}}{\partial y} > 0; \frac{\partial P_{T_1}}{\partial y} < 0 \qquad \textbf{(13)}$$

Problema pe care o punem este următoarea: care este momentul T_1 la care este optim pentru investitor să vândă obligaţiunea, ţinând seama că y se modifică odată cu rata dobânzii de pe piaţa monetară. La această problemă răspunde conceptul de **„durată” a unei obligaţiuni**.

Indicatorul de durată a fost introdus pentru prima oară de Frederick Macauley în anul 1938. Conceptul, uitat iniţial, a fost redescoperit şi valorificat de către Paul Samuelson (1945), John Hicks (1946), F.M. Redington (1952) ş.a.

Conceptul de durată este, în prezent, utilizat pe larg în domeniul imunizării portofoliilor de obligaţiuni împotriva variaţiei valorii acestora în raport cu rata dobânzii.

Pentru a vedea modul în care preţul de piaţă variază în raport cu rata dobânzii, vom calcula:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\sum_{t=1}^{T} C_t (1+y)^{-t} + F \cdot (1+y)^{-T}\right]$$

Rezultă:

$$\frac{dP}{y} = -\frac{1}{1+y}\left[\sum_{t=1}^{T} t \frac{C_t}{(1+y)^t} + T \frac{F}{(1+y)^T}\right]$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{P}{1+y}\left[\sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{C_t / P}{(1+y)^t} + T \cdot \frac{F / P}{(1+y)^T}\right] \qquad \textbf{(14)}$$

Prin definiţie, durata (Macauley) a unei obligaţiuni este:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{C_t / P}{(1+y)^t} + T \cdot \frac{F / P}{(1+y)^T} \qquad \textbf{(15)}$$

Vom nota cu:

$$w_t = \frac{C_t / P}{(1+r)^t}, \quad t = 1,2,...,T-1$$

$$w_T = \frac{C_T + F / P}{(1+r)^T} \qquad \textbf{(16)}$$

Cu notațiile **(16),** formula **(15)** se rescrie astfel:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot w_t \qquad \textbf{(17)}$$

Vom observa că w_t reprezintă ponderea venitului din anul t în totalul investiției (P) actualizate. În ceea ce priveşte indicatorul D, conform formulei **(17)**, el este o „medie" ponderată a mărimilor t, ponderile fiind w_t, t = 1,...,T.

Cu notația **(15),** formula **(14)** se scrie astfel:

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{P}{1+y} D \qquad \textbf{(18)}$$

sau:

$$\frac{y}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = -\frac{y}{1+y} D \qquad \textbf{(19)}$$

respectiv:

$$E_y P = -\frac{y}{1+y} D \qquad \textbf{(20)}$$

Cu E_yP s-a notat coeficientul de elasticitate a prețului în raport cu rata dobânzii y. Formula **(20)** arată că elasticitatea prețului P în raport cu rata obânzii y este proporțională cu durata, coeficientul de proporționalitate fiind $-\frac{y}{1+y}$.

Prin definiție, mărimea

$$\frac{D}{1+i} = D_m \qquad \textbf{(21)}$$

se numeşe durată modificată.

Vom rescrie formula **(18)** astfel:

$$\frac{dP}{dy} = -P \cdot D_m \qquad \textbf{(22)}$$

sau

$$\frac{dP}{P} = -D_m \cdot dy \qquad \textbf{(23)}$$

Din **(23)** rezultă că:

$$\mathrm{var}\left(\frac{dP}{P}\right) = D_m{}^2 \cdot \mathrm{var}(dy) \qquad \textbf{(24)}$$

respectiv:

$$\sigma\left(\frac{dP}{P}\right) = D_m \cdot \sigma(dy) \qquad \textbf{(25)}$$

Formula **(25)** arată că abaterea standard σ a modificării relative a prețului $\left(\frac{dP}{P}\right)$ este proporțională cu abaterea standard a ratei dobânzii, coeficientul de proporționalitate fiind durata modificată D_m.

3. Proprietățile duratei

În acest paragraf vom analiza proprietățile duratei şi, în primul rând, modul în care acest indicator depinde de:

- Rata cuponului: C
- Rentabilitatea la scadență: y
- Maturitate (scadență): T

Pentru a deduce proprietățile duratei, vom deduce, pentru cazul în care cuponul este constant în timp, următoarea formulă importantă:

$$D = 1 + \frac{1}{y} + \frac{T(y-c)-(1+y)}{c\left[(1+y)^{T}-1\right]+y} \qquad \textbf{(26)}$$

Pentru a deduce formula **(26)**, vom recrie formula **(8')** astel:

$$\frac{P}{F} = \frac{c}{y}\left[1-(1+y)^{-T}\right]+(1+y)^{-T}$$

sau

$$\frac{P}{F} = \frac{c}{y}\left[1-(1+y)^{-T} + y(1+y)^{-T}\right] \qquad \textbf{(27)}$$

Avem:

$$\ln\frac{P}{F} = -\ln y + \ln\left[c[(1-(1+y)^{-T} + y\cdot(1+y)^{-T}]\right] \qquad \textbf{(28)}$$

Derivând în raport cu y, rezultă:

$$\frac{d\ln\frac{P}{F}}{dy} = \frac{d\ln P}{dy} = \frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{y} + \frac{T\cdot c\cdot(1+y)^{-T-1} + (1+y)^{-T} - T\cdot y\cdot(1+y)^{-T-1}}{c\left[1-(1+y)^{-T}\right]+y(1+y)^{-T}}$$

Rezultă:

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{y} + \frac{T\cdot c\cdot(1+y)^{-T-1} + (1+y)^{-T} - T\cdot y\cdot(1+y)^{-T-1}}{c\left[1-(1+y)^{-T}\right]+y(1+y)^{-T}} \qquad \textbf{(28')}$$

Conform formulei **(18),** avem:

$$D = -(1+y)\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dy} \qquad \textbf{(29)}$$

Rezultă că, pentru a obține valoarea lui D, vom înmulți ambii membri ai relației (28) cu – (1 +y):

$$D = -(1+y)\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dy} = \frac{1+y}{y} + \frac{T\cdot y\cdot(1+y)^{-T} - (1+y)^{-T+1} - T\cdot c\cdot(1+y)^{-T}}{c\left[1-(1+y)^{-T}\right] + y(1+y)^{-T}}$$

Amplificând a doua fracție in formula de mai sus cu $(1 + y)^T$, rezultă:

$$D = 1 + \frac{1}{y} + \frac{T\cdot(y-c)-(1+y)}{c\left[(1+y)^T - 1\right] + y}$$

care reprezintă formula **(26).**

Formula **(26)** permite calculul relativ uşor al duratei unei obligațiuni.

APLICAȚIE:

Vom presupune că pentru o obligațiune avem următoarele date:

T = 10 ani, c = 8%, y = 5%.

Conform formulei **(26)** avem:

$$D = 1 + \frac{1}{0.05} + \frac{10\cdot(0.05-0.08)-(1+0.05)}{0.08\cdot\left[(1+0.05)^{10}-1\right]+0.05}$$

$$D = 1 + 20 + \frac{-1.35}{0.10031157} = 21 - 13.458 = 7.54 \ ani$$

Rezultă că durata obligațiunii este 7.54 ani.

Din formula **(26)** rezultă uşor următoarele concluzii, care reprezintă proprietăți ale duratei:

1. Pentru obligațiunile zero-cupon (c = 0),

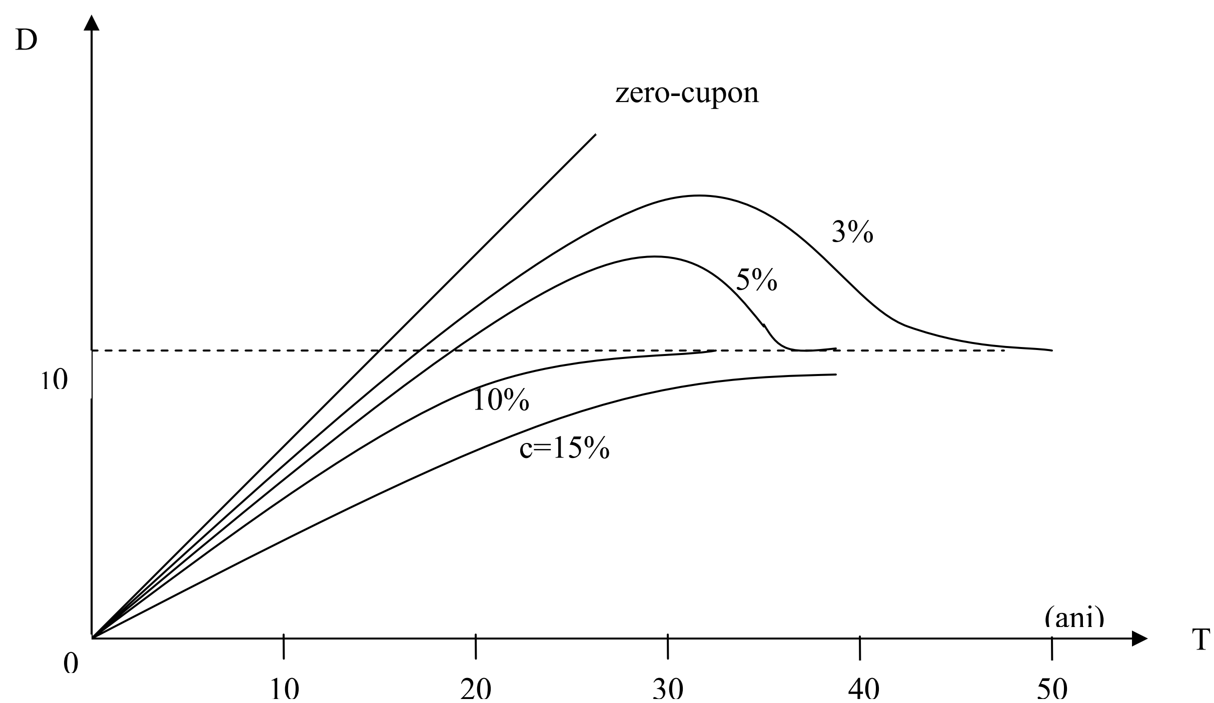
   D = T.

2. Pentru obligațiuni perpetue ($T \to \infty$),

$D = 1 + \frac{1}{y}$.

3. Pentru obligațiunile ce se vând la par sau suprapar, ceea ce înseamnă c ≥ y, durata creşte odată cu maturitatea T.
4. Pentru obligațiunile ce se vând subpar (c < y), ceşterea maturității duce întâi la creşterea lui D, după care durata scade, tinzând spre $D_\infty = 1 + \frac{1}{y}$.

În figura 1. se prezintă diverse curbe ale duratei, în funcție de maturitatea T şi rata cuponului c, pentru cazul unei obligațiuni ce are y = 10%.



Durata unui portofoliu de obligațiuni: în cazul în care avem un portofoliu format dintr-un număr de n tipuri de obligațiuni, durata portofoliului se calculează astfel:

$D_p = x_1 D_1 + x_2 D_2 + \ldots + x_n D_n$

S-au folosit următoarele notații:

D_P – durat portofoliului

D_k – durata unei obligațiuni de tip k (k = 1,...,n)

X_k – ponderea valorii obligațiunilor de tip k în totalul valorii portofoliului.

Rezultă că:

$$x_k = \frac{N_k P_k}{\sum_{j=1}^{n} N_j P_j}$$

unde:

P_k – prețul unei obligațiuni de tip k (k = 1,...,n)

N_k – numărul de obligațiuni de tip k în cadrul portofoliului (k = 1,...,n)