

# Modele VaR

Adrian Ionut Codirlasu, PhD, CFA

# Amendamentul acordului de la Basel pentru încorporarea riscului de piață în calculul cerințelor de capital (1995)

---

- Riscul de piață definit ca riscul de a înregistra pierderi atât din pozițiile bilanțiere cât și din cele extrabilanțiere datorită evoluțiilor prețurilor activelor
- Riscurile reglementate:
  - Riscul implicat de tranzacționarea instrumentelor sensibile la rata dobânzii și la evoluția cursului acțiunilor;
  - Riscul de curs de schimb și riscul legat evoluția prețului mărfurilor
- Permite băncilor să utilizeze propriile modele de management al riscului de piață
- A rămas în vigoare și ulterior adoptării acordului Basel II (sub denumirea de BIS 98)

# Măsurarea riscului de piață - VaR

---

- *VaR*-ul reprezintă pierderea estimată a unui portofoliu fix de instrumente financiare pe un orizont fix de timp
- Utilizarea acestui indicator implică alegerea arbitrară a doi parametri:
  - perioada de deținere a instrumentelor financiare (orizontul de timp),
  - nivelul de relevanță.
- Conform (Amendamentului) Acordului de la Basel privind Adekvarea Capitalului :
  - orizontul de timp este de două săptămâni (10 zile lucrătoare),
  - nivelul de relevanță este de 1 la sută.

# Matodologii de calcul

---

- VaR analitic
- VaR calculat pe bază de simulare Monte Carlo
- VaR istoric
- VaR calculat pe baza mapării pozițiilor în active financiare la factorii de risc
- VaR cu volatilitate măsurată prin modele EWMA
- VaR cu volatilitate măsurată prin modele GARCH

# VaR analitic

---

- Ipoteza pe care se bazează această metodă este că randamentele activelor din portofoliu ( $R$ ) pe orizontul de deținere ( $h$ ) sunt normal distribuite, având media  $\mu$  și deviația standard  $\sigma$  :  $R \sim N(\mu, \sigma)$
- Dacă valoarea prezentă a portofoliului este  $S$ ,  $VaR$ -ul pentru orizontul de  $h$  zile, cu nivelul de relevanță  $\alpha$  este :  $VaR = -(Z_\alpha \sigma + \mu)S$   
unde  $Z_\alpha$  este cea mai mică percentilă  $\alpha$  a distribuției normale standard (2.32625 pentru  $\alpha = 0.005$ )

# VaR istoric

---

- Ipoteză: informațiile incluse în prețurile din trecutul apropiat sunt suficiente pentru cuantificarea riscului din viitorul apropiat
- Constă în calculul unei serii ipotetice de profit și pierdere ( $P/L$ ) sau randamente zilnice pentru portofoliul curent, pentru o perioadă istorică specifică
- $VaR$ -ul este estimat pe baza distribuției seriei  $P/L$
- Alte metodologii pentru calculul  $VaR$  istoric ponderează valorile  $P/L$  folosite în construirea distribuției seriei  $P/L$

# Maparea pozițiilor la factorii de risc

---

- Descompunerea instrumentelor financiare într-un număr mic de instrumente de bază
- Tipuri de instrumente:
  - pozițiile spot pe curs de schimb,
  - pozițiile în acțiuni,
  - obligațiuni zero-cupon,
  - pozițiile *futures/forward*.

# Maparea pozițiilor în acțiuni

- Utilizarea modelului CAPM sau a altor modele factoriale

## Modelul CAPM

$$R_k = \alpha_k + \beta_k R_m + \varepsilon_k$$

$$\sigma_k^2 = \beta_k^2 \sigma_m^2 + \sigma_{k,S}^2$$

Pentru o acțiune  $VaR = -Z_\alpha \sigma_k x_k$

Pentru un portofoliu diversificat

$$VaR = -Z_\alpha X \sigma_m \sum_{k=1}^n \left( \frac{\beta_k x_k}{X} \right)$$



# Maparea pozițiilor în opțiuni

---

- Aproximări de ordinul unu sau doi ale seriei Taylor: metodologia delta și metodologia delta-gamma

Metodologia delta-gamma

$$\Delta c \approx \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma (\Delta S)^2$$

$$VaR \approx \delta Z_{\alpha} \sigma S - \frac{1}{2} (Z_{\alpha} \sigma S)^2$$

# VaR calculat utilizând EWMA

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda)r_{t-1}^2 + \lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

$\lambda$  reprezintă o constantă de ponderare (RiskMetrics, 0.94)

Volatilitatea calculată prin modele *EWMA* poate fi încorporată în modele *VaR* prin:

- Simulare istorică cu ponderarea datelor funcție de volatilitate. Randamentele istorice sunt standardizate pe baza volatilității condiționate.
- Simulare Monte Carlo utilizând *EWMA*. Randamentele pot fi simulate considerând că urmează o distribuție normală, dar matricea de covarianță este creată utilizând *EWMA*.
- VaR analitic utilizând *EWMA*.

# VaR calculat utilizând modele GARCH

Includerea modelelor *GARCH* în calculul *VaR*, ca și în cazul modelelor *EWMA*, poate fi realizată prin:

- *VaR* analitic, similar ca în cazul *EWMA*, prin utilizarea unei matrice de covarianță bazată pe modele *GARCH*.
- Simulare istorică în care datele sunt ponderate funcție de volatilitate – datele sunt standardizate funcție de volatilitatea lor estimată prin modele *GARCH*.
- Simulare Monte Carlo. Evoluția randamentelor poate fi simulată pe baza unei matrice de covarianță calculate pe bază de modele *GARCH*, ceea ce permite atât simularea evoluției volatilității cât și simularea evoluției randamentelor activelor.
- Utilizarea modelelor *GARCH* pentru modelarea directă P/L-ului portofoliului și calculul *VaR* funcție de volatilitatea condiționată a acestuia, în acest fel evitându-se calculul matricelor de covarianță

# Modele VaR – Aplicații



# **Calculul VaR pentru un portofoliu de valute**

# Portofoliu

---

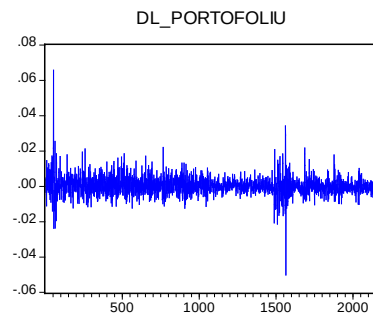
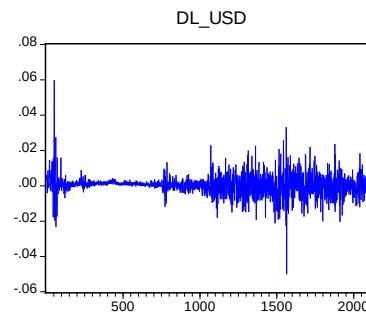
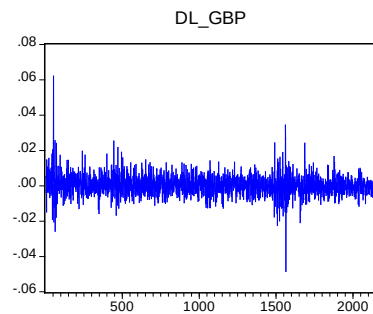
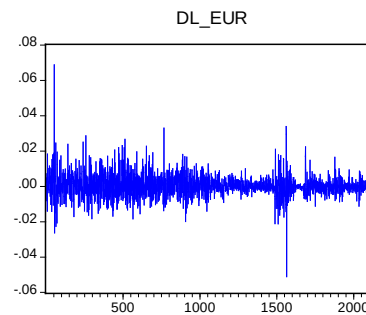
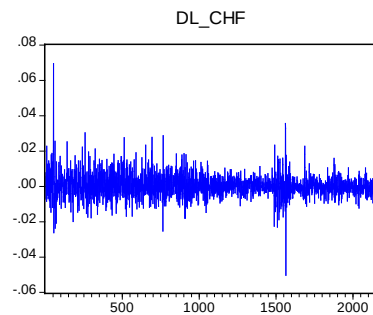
- 40 la sută EUR, 20 la sută GBP, 20 la sută CHF și 20 la sută USD versus RON
- Calculul VaR este realizat pe date zilnice, perioada analizată fiind ianuarie 1999 – mai 2007
- Măsurile *VaR* calculate:
  - *VaR* analitic,
  - *VaR* istoric,
  - *VaR* pe baza de volatilitate *EWMA*
  - *VaR* pe bază de volatilitate estimată prin modele *GARCH*.

# Momentele distribuției seriilor și coeficienții de corelație

|            | <b>Medie</b> | <b>Deviatie standard</b> | <b>Asimetrie</b> | <b>Kurtotica</b> |
|------------|--------------|--------------------------|------------------|------------------|
| CHF        | 0.0004       | 0.0065                   | 0.7743           | 12.4616          |
| EUR        | 0.0004       | 0.0062                   | 0.8571           | 14.1099          |
| GBP        | 0.0004       | 0.0058                   | 0.5610           | 12.8327          |
| USD        | 0.0004       | 0.0054                   | 0.3496           | 15.9521          |
| Portofoliu | 0.0004       | 0.0053                   | 0.9496           | 20.5195          |

|            | <b>CHF</b> | <b>EUR</b> | <b>GBP</b> | <b>USD</b> |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>CHF</b> | 1          | 0.94       | 0.70       | 0.40       |
| <b>EUR</b> | 0.94       | 1          | 0.72       | 0.42       |
| <b>GBP</b> | 0.70       | 0.72       | 1          | 0.58       |
| <b>USD</b> | 0.40       | 0.42       | 0.58       | 1          |

# Evoluția randamentelor zilnice ale seriilor





# VaR analitic

---

A fost calculată deviația standard a  $P/L$ -ului portofoliului de monede pe ultimele 250 de zile,  $\sigma_p$ , și pe baza acestei serii, considerând o valoare a portofoliului de o unitate monetară (1 RON), un nivel de relevanță de 1 la sută și un orizont de prognoză de 10 zile a fost generată măsura  $VaR$  pe baza relației

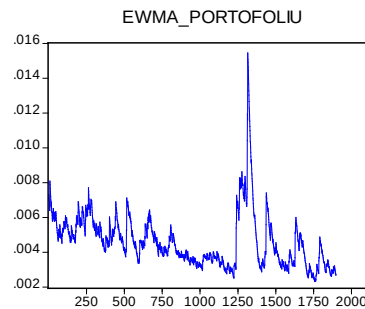
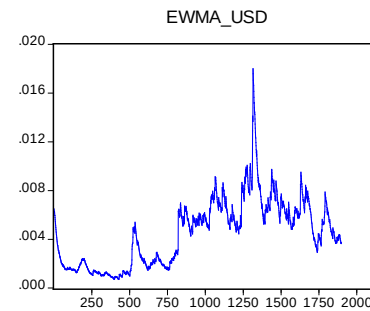
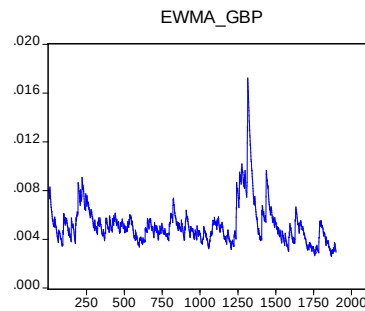
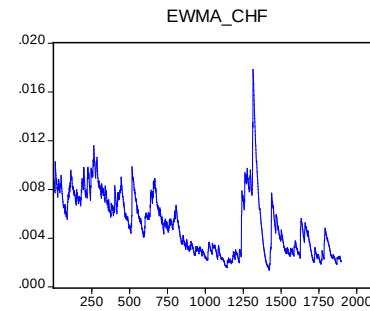
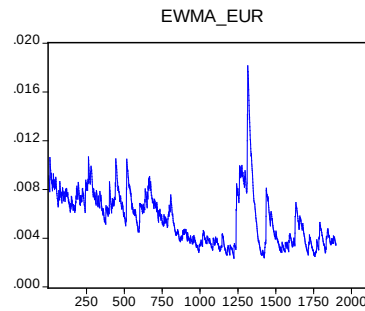
$$VaR = 2.32635 \cdot \sigma_p \cdot \sqrt{10}$$

# VaR istoric

---

- Măsura *VaR* pentru un orizont de 10 zile a fost considerată percentila 1 la sută pentru seria de randamente zilnice ale portofoliului înmulțită cu  $\sqrt{10}$

# VaR cu EWMA - volatilități



# VaR cu EWMA - metodologie

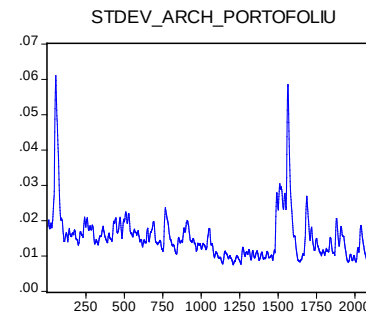
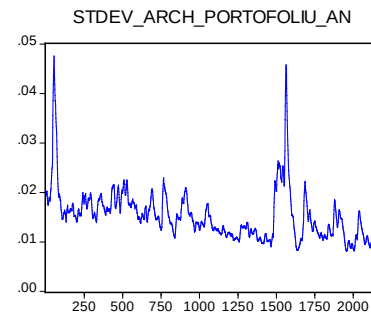
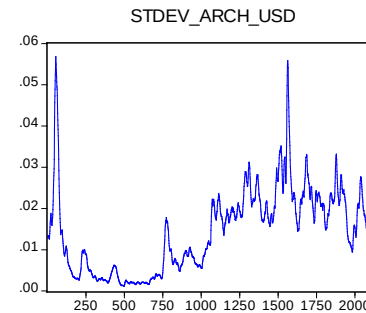
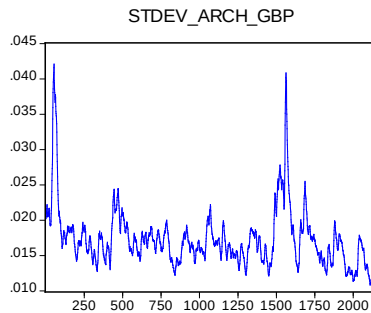
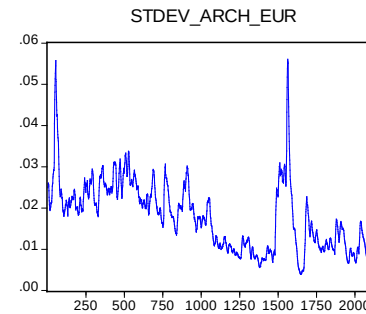
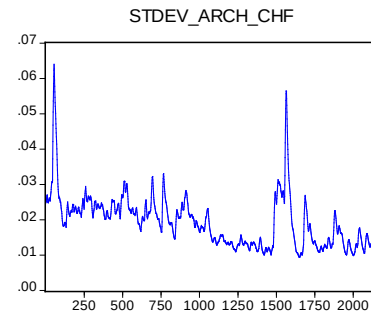
---

- Măsura *VaR* care încorporează volatilitățile calculate pe baza metodologiei *EWMA* a fost generată prin metoda analitică, orizontul de timp fiind de 10 zile, iar nivelul de relevanță de 1 la sută.

$$VaR_{EWMA} = 2.32635 \cdot \sigma_{p\_EWMA} \cdot \sqrt{10}$$

- unde  $\sigma_{p\_EWMA}$  reprezintă volatilitatea portofoliului, calculată pe baza volatilității *EWMA* a celor patru monede și a coeficienților de corelație dintre acestea, considerați constanți.

# VaR cu GARCH - volatilități



# VaR cu GARCH - metodologie

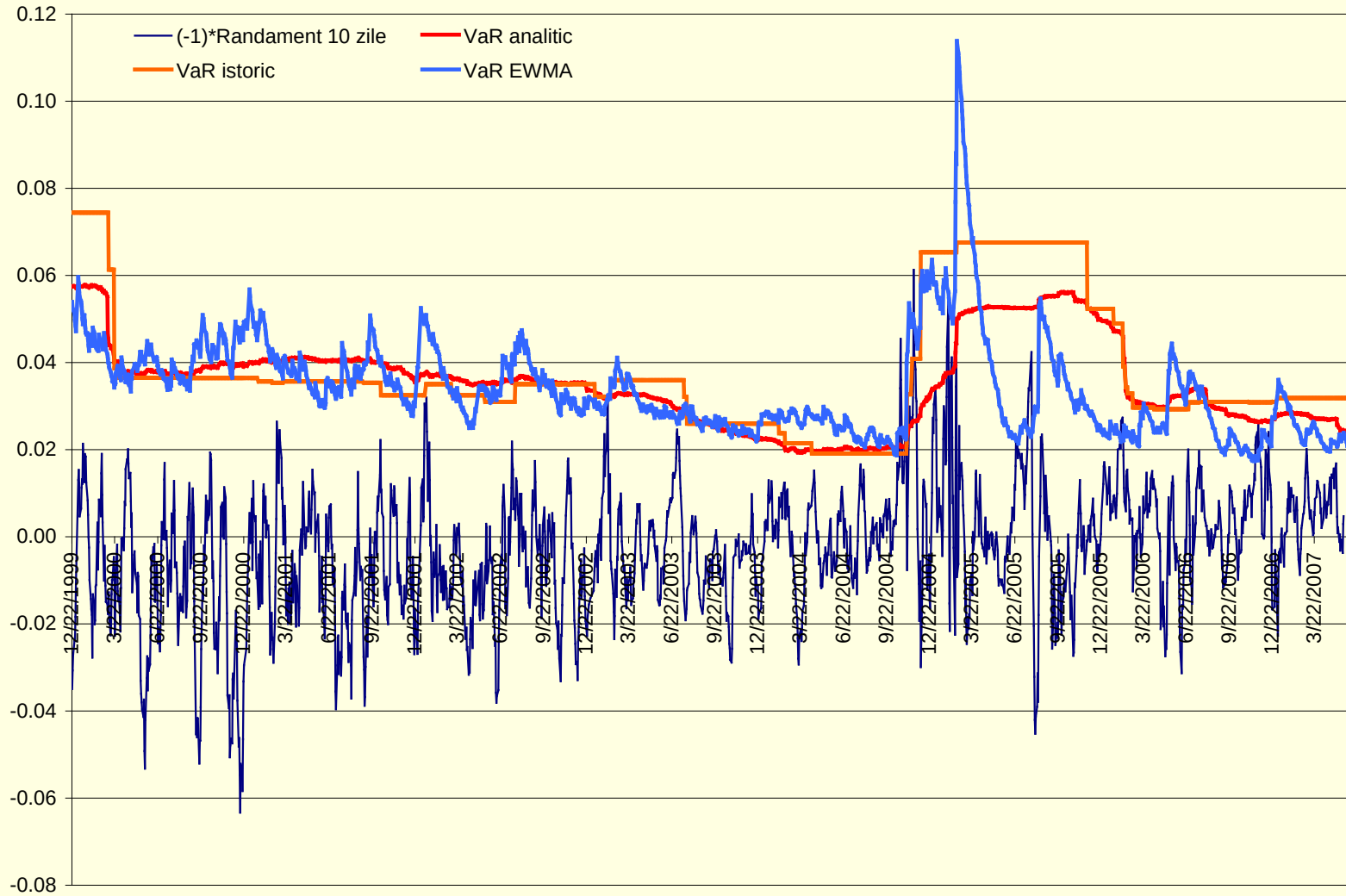
---

- Măsura *VaR* pentru un nivel de relevanță de 1 la sută și un orizont de 10 zile conform relației:

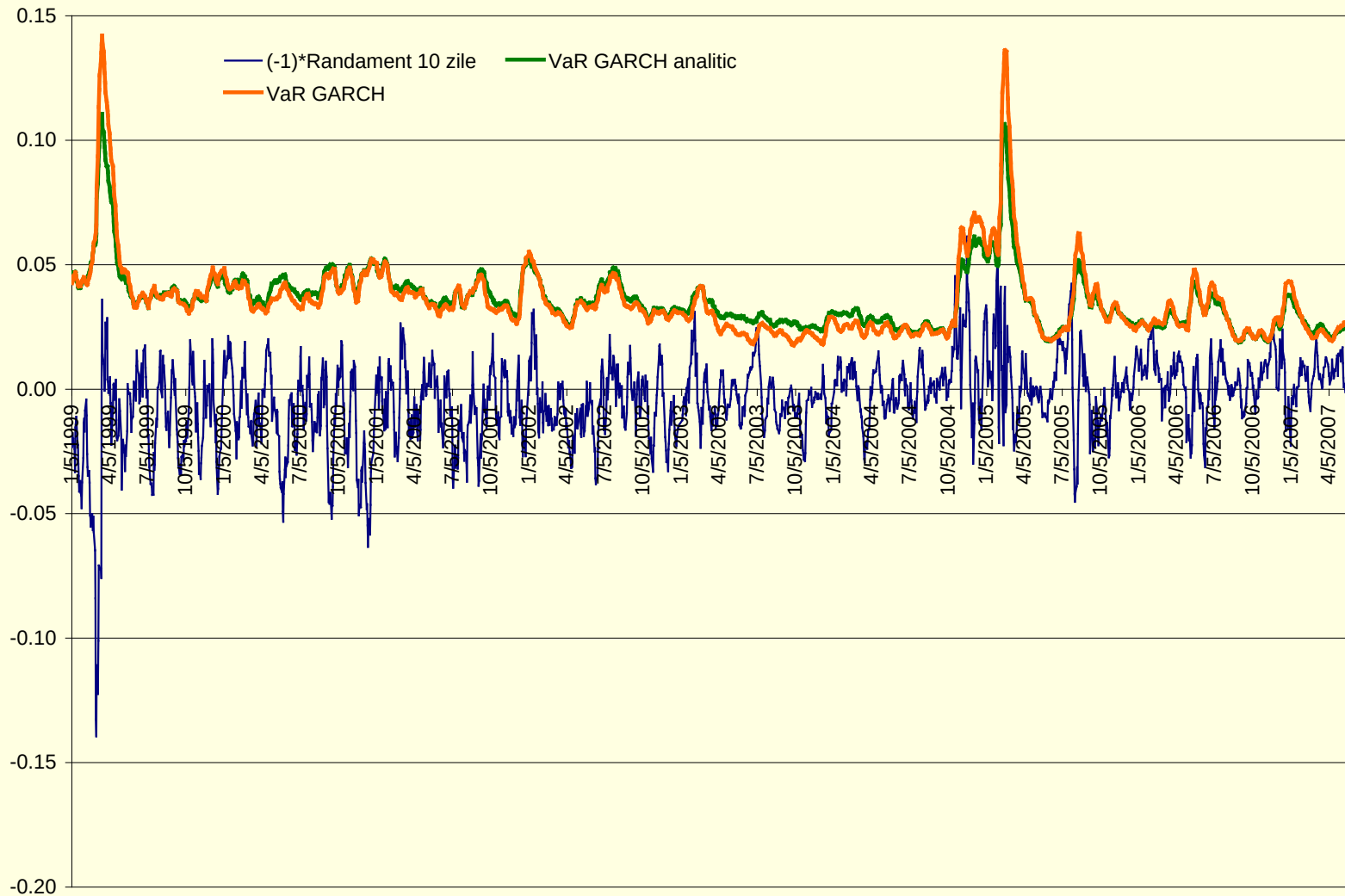
$$VaR = 2.32535 \cdot \sigma_{ARCH}$$

- Ipoteză: coeficienții de corelație sunt constanți în perioada analizată

# VaR istoric, analitic și EWMA



# VaR prin modele GARCH





# Concluzii

---

- Modelul pe bază de volatilitate calculată prin *EWMA* tinde să subestimeze riscul portofoliului, înregistrând o rată a erorilor (1,059 la sută) mai mare decât nivelul de relevanță utilizat (de 1 la sută).
- Similar, *VaR*-ul analitic subestimează riscul portofoliului, erorile produse (1,059 la sută) fiind de asemenea superioare nivelului de relevanță.
- Modelul pe bază de simulare produce cele mai puține erori (0,371 la sută) dintre toate celelalte metodologii utilizate, dar comparativ cu alte modele generează cerințe de capital mai ridicate. De asemenea, în perioada cu volatilitate ridicată, oct. 2004 – feb. 2005 acesta subestimează riscul.
- Măsurile *VaR* care au la bază modele *GARCH*, se încadrează în nivelul de relevanță de 1 la sută și, în plus, datorită caracteristicii *forward looking* a acestora, se comportă bine și în perioadele cu volatilitate ridicată.
- Pe baza măsurilor *VaR* estimate se calculează cerințele de capital aferente riscului de piață, cerințe definite ca multiplu de măsură *VaR*.

# Concluzii

---

| <b>Metodologie</b>        | <b>Erori (la sută)</b> |
|---------------------------|------------------------|
| <i>VaR</i> analitic       | 1.059                  |
| <i>VaR</i> istoric        | 0.371                  |
| <i>VaR EWMA</i>           | 1.271                  |
| <i>VaR GARCH</i> analitic | 0.842                  |
| <i>VaR GARCH</i>          | 0.936                  |



# **Calculul VaR pentru un portofoliu de acțiuni**

# Portofoliu

---

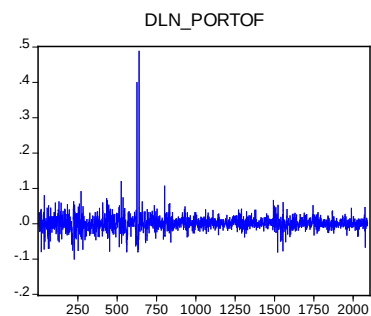
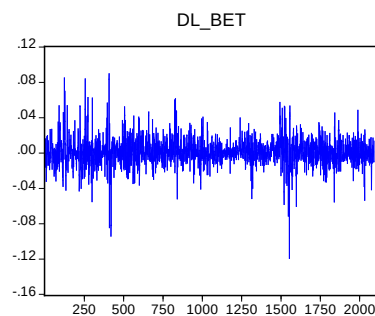
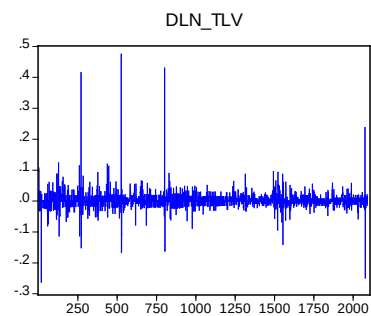
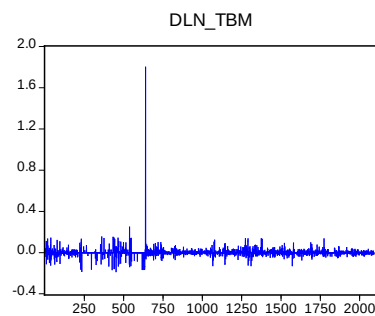
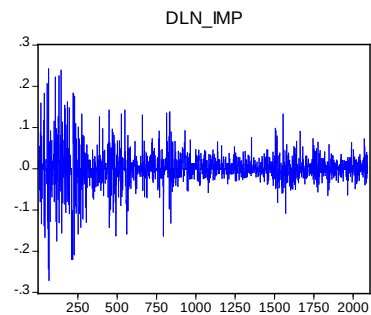
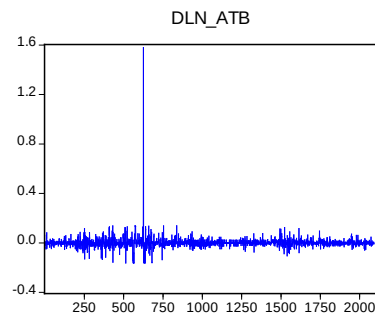
- Antibiotice Iași (ATB), Impact București (IMP), Turbomecanica (TBM) și Banca Transilvania (TLV) având ponderi egale
- Calculul VaR realizat pe date zilnice, perioada analizată fiind ianuarie 1999 – mai 2007
- Măsuri *VaR* sunt:
  - *VaR* analitic,
  - *VaR* istoric,
  - *VaR* prin maparea pozițiilor pe baza modelului *CAPM*,
  - *VaR* pe baza de volatilitate *EWMA* și
  - *VaR* pe bază de volatilitate estimată prin modele *GARCH*

# Momentele distribuției seriilor și coeficienții de corelație

|            | <b>Medie</b> | <b>Deviatie standard</b> | <b>Asimetrie</b> | <b>Kurtotica</b> |
|------------|--------------|--------------------------|------------------|------------------|
| ATB        | 0.0022       | 0.0468                   | 18.1778          | 619.4992         |
| IMP        | 0.0012       | 0.0402                   | -0.3704          | 12.4466          |
| TBM        | 0.0019       | 0.0511                   | 20.7436          | 732.6264         |
| TLV        | 0.0024       | 0.0301                   | 3.7545           | 77.5376          |
| BET        | 0.0015       | 0.0158                   | -0.0568          | 9.0518           |
| PORTOFOLIU | 0.0019       | 0.0234                   | 6.5188           | 132.5431         |

|            | <b>ATB</b> | <b>IMP</b> | <b>TBM</b> | <b>TLV</b> |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>ATB</b> | 1          | 0.08       | 0.09       | 0.07       |
| <b>IMP</b> | 0.08       | 1          | 0.05       | 0.06       |
| <b>TBM</b> | 0.09       | 0.05       | 1          | 0.05       |
| <b>TLV</b> | 0.07       | 0.06       | 0.05       | 1          |

# Evoluția randamentelor zilnice ale seriilor



# VaR analitic

---

A fost calculată deviația standard a  $P/L$ -ului portofoliului de acțiuni pe ultimele 250 de zile, și pe baza acestei serii, considerând o valoare a portofoliului de o unitate monetară (1 RON), un nivel de relevanță de 1 la sută și un orizont de prognoză de 10 zile a fost generată măsura  $VaR$  pe baza relației

$$VaR = 2.32635 \cdot \sigma_p \cdot \sqrt{10}$$

# VaR istoric

---

- Măsura *VaR* pentru un orizont de 10 zile a fost considerată percentila 1 la sută pentru seria de randamente zilnice ale portofoliului înmulțită cu  $\sqrt{10}$



# VaR prin maparea pozițiilor estimare beta

| Variable                              | Coefficient | Std. Error         | t-Statistic | Prob.  |
|---------------------------------------|-------------|--------------------|-------------|--------|
| C                                     | 0.001284    | 0.000443           | 2.895438    | 0.0038 |
| _ATB--DL_BET                          | 0.553463    | 0.063874           | 8.66492     | 0      |
| _IMP--DL_BET                          | 0.421958    | 0.055117           | 7.655735    | 0      |
| _TLV--DL_BET                          | 0.521952    | 0.04014            | 13.00313    | 0      |
| _TBM--DL_BET                          | 0.224905    | 0.070823           | 3.175588    | 0.0015 |
| Fixed Effects (Cross)                 |             |                    |             |        |
| _ATB--C                               | 0.000112    |                    |             |        |
| _IMP--C                               | -0.000701   |                    |             |        |
| _TLV--C                               | 0.000318    |                    |             |        |
| _TBM--C                               | 0.000272    |                    |             |        |
| Effects Specification                 |             |                    |             |        |
| Cross-section fixed (dummy variables) |             |                    |             |        |
| Weighted Statistics                   |             |                    |             |        |
| R-squared                             | 0.03432     | Mean dependent var | 0.046771    |        |
| Adjusted R-squared                    | 0.033511    | S.D. dependent var | 1.017676    |        |
| S.E. of regression                    | 1.000479    | Sum squared resid  | 8360        |        |
| F-statistic                           | 42.40384    | Durbin-Watson stat | 2.018084    |        |
| Prob(F-statistic)                     | 0           |                    |             |        |
| Unweighted Statistics                 |             |                    |             |        |
| R-squared                             | 0.027444    | Mean dependent var | 0.001923    |        |
| Sum squared resid                     | 14.88846    | Durbin-Watson stat | 1.996602    |        |

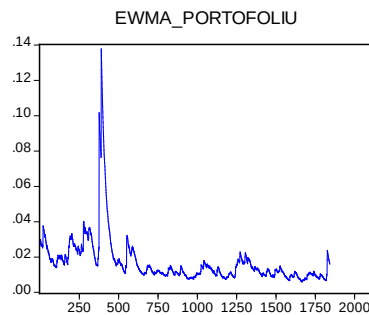
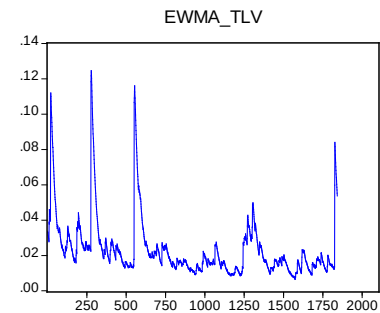
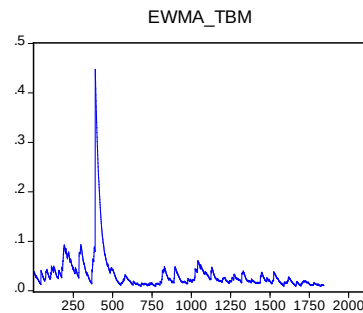
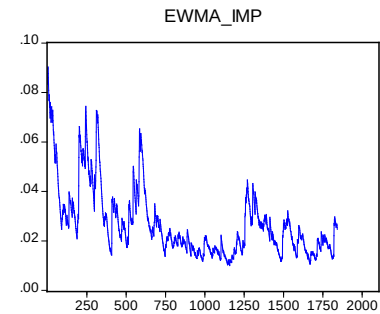
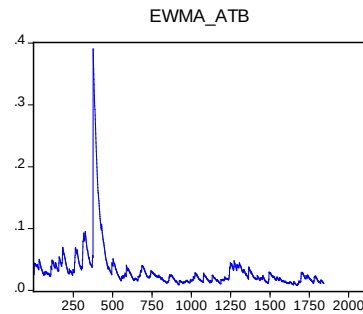
# VaR prin maparea pozițiilor metodologie

---

- Măsura  $VaR$ , cu un nivel de relevanță de 1 la sută și orizont de 10 zile a fost generată pe baza relației:

$$VaR = 2.32635 \cdot \sigma_m \cdot \sqrt{10} \cdot \sum_{k=1}^4 \beta_k x_k$$

# VaR cu EWMA - volatilități



# VaR cu EWMA - metodologie

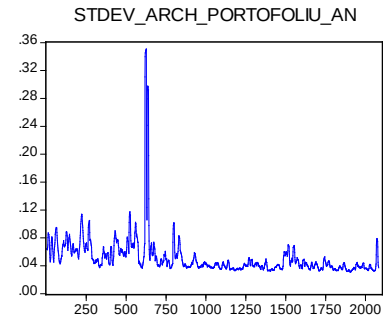
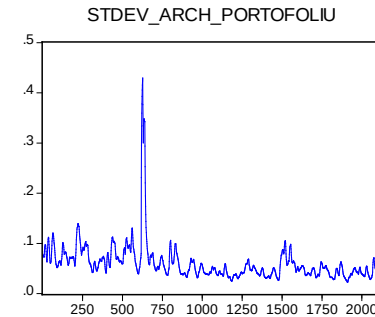
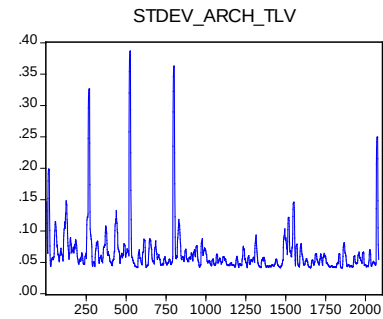
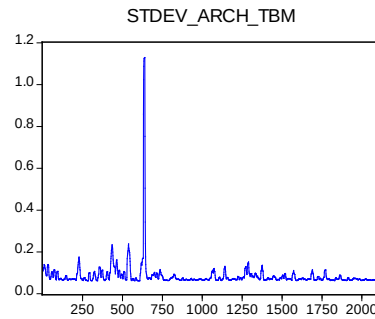
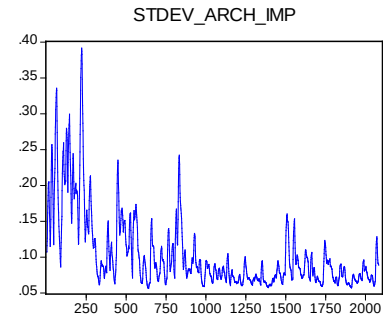
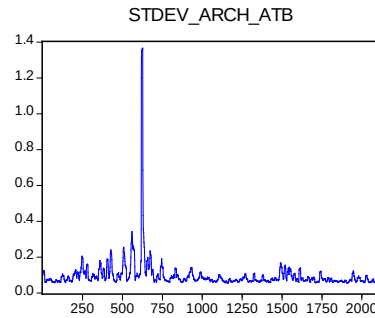
---

- Măsura *VaR* care încorporează volatilitățile calculate pe baza metodologiei *EWMA* a fost generată prin metoda analitică, orizontul de timp fiind de 10 zile, iar nivelul de relevanță de 1 la sută.

$$VaR_{EWMA} = 2.32635 \cdot \sigma_{p\_EWMA} \cdot \sqrt{10}$$

- unde  $\sigma_{p\_EWMA}$  reprezintă volatilitatea portofoliului, calculată pe baza volatilității *EWMA* a celor patru acțiuni și a coeficienților de corelație dintre acestea, considerați constanți.

# VaR cu GARCH - volatilități



# VaR cu GARCH - metodologie

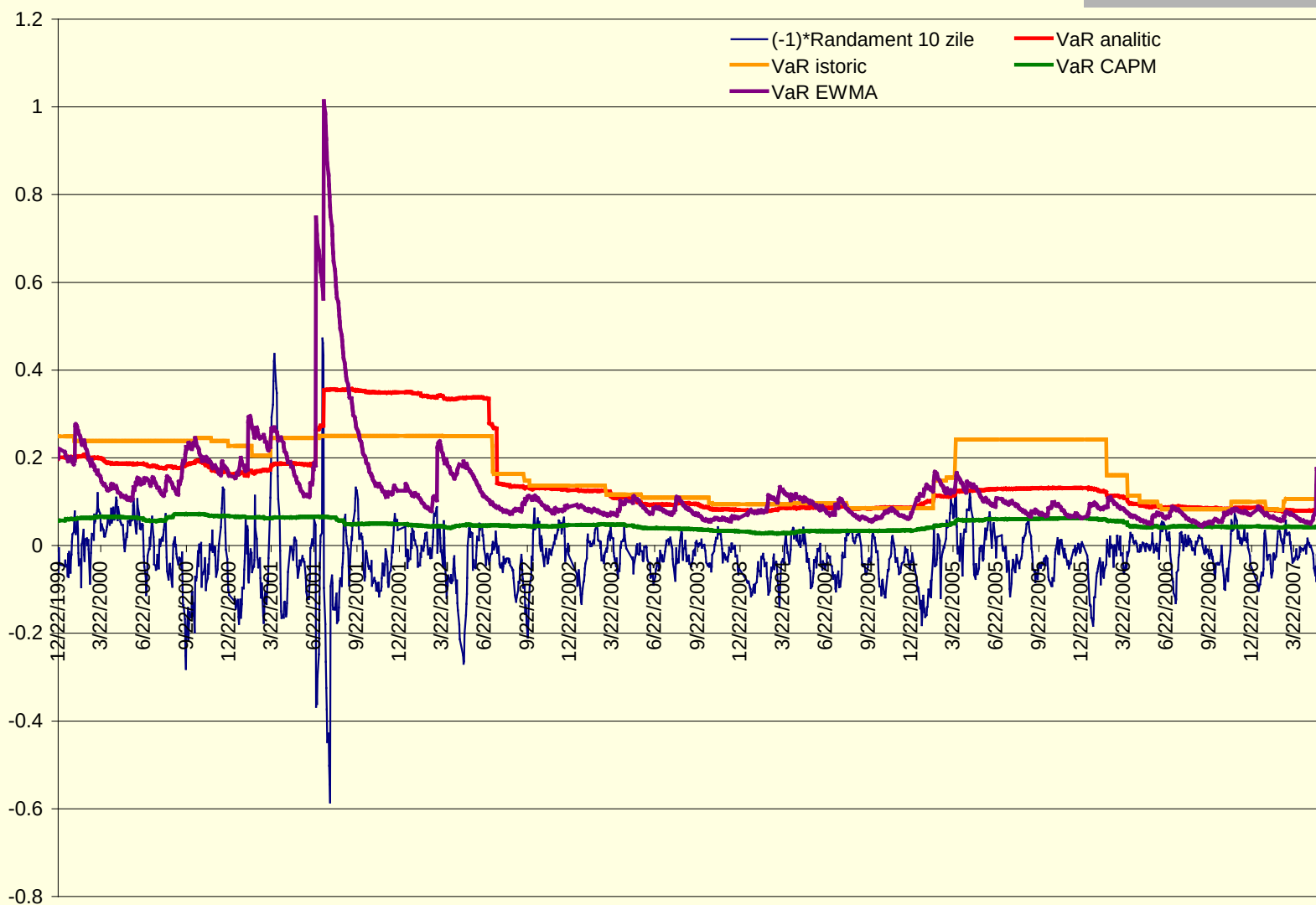
---

- Măsura *VaR* pentru un nivel de relevanță de 1 la sută și un orizont de 10 zile conform relației:

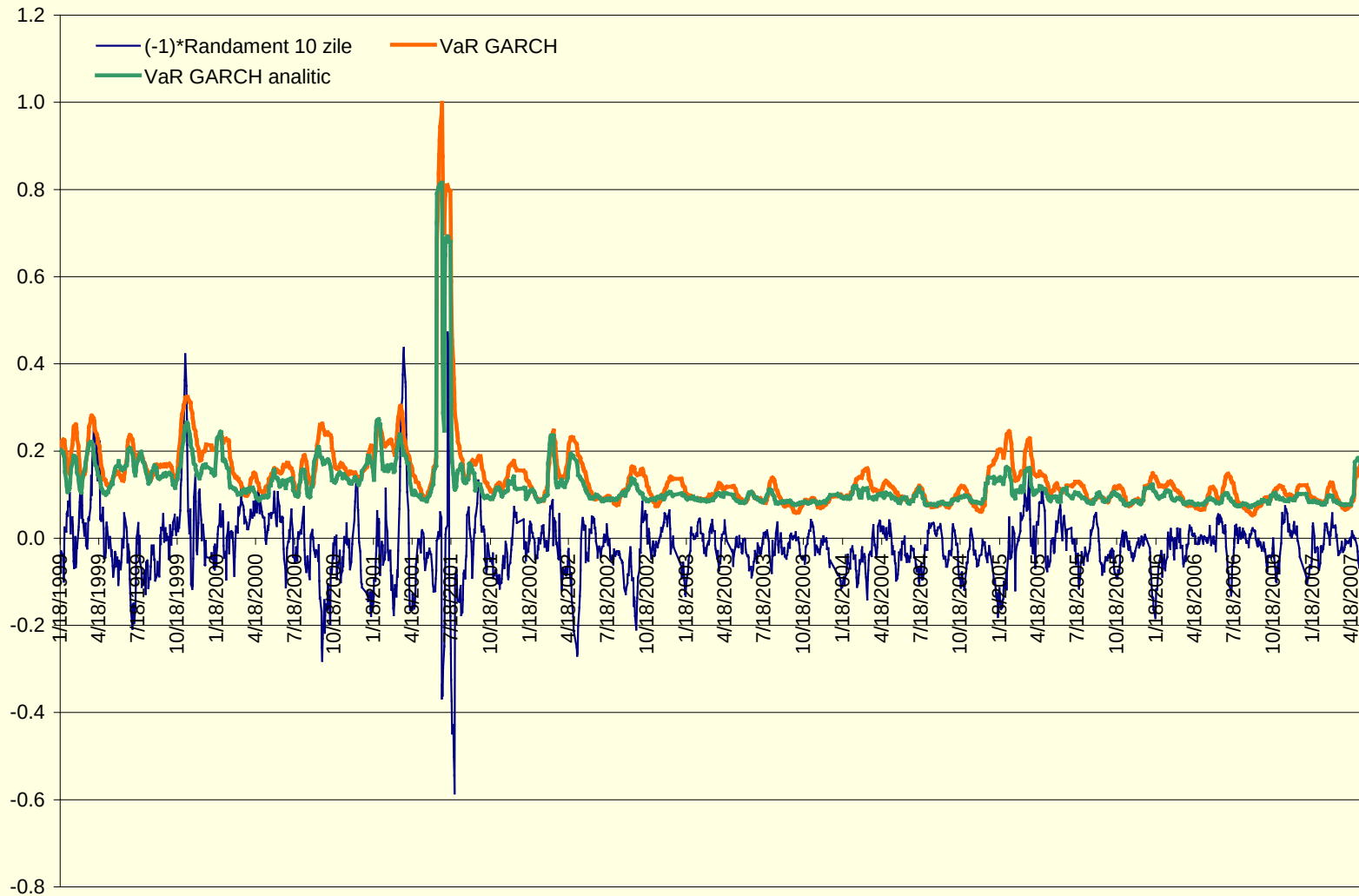
$$VaR = 2.32535 \cdot \sigma_{ARCH}$$

- Ipoteză: coeficienții de corelație sunt constanți în perioada analizată

# VaR istoric, analitic, prin maparea pozițiilor și EWMA



# VaR prin modele GARCH





# Concluzii

- Metodologiile care s-au încadrat în nivelul de relevanță de 1 la sută sunt: *VaR* analitic, *VaR* istoric, *VaR EWMA* și *VaR GARCH* aplicat randamentelor portofoliului.
- Modelul pe bază de mapare a pozițiilor pe baza modelul *CAPM* subestimează constant riscul de piață al portofoliului (rata de eroare este de 7,442 la sută). O posibilă explicație pentru aceste rezultate este faptul că portofoliul conține un număr mic de acțiuni și, ca urmare, factorii de risc specifici fiecărei firme au un impact încă semnificativ asupra riscului portofoliului.
- Modelul bazat pe *EWMA* a generat cele mai puține erori în perioada analizată având o rată de eroare de sub 0,5 la sută.
- De asemenea și modelul pe bază de simulare istorică, modelul analitic și modelele bazate pe estimarea volatilității prin modele *GARCH* aplicate randamentelor portofoliului se încadrează în nivelul de relevanță de 1 la sută. Dintre aceste patru modele se detașează modelul bazat pe *GARCH* aplicat randamentelor portofoliului, care față de celelalte două implică cerințe de capital mai reduse.
- Dintre cele două modele *GARCH*, modelul bazat pe metoda analitică nu satisface cerința unui nivel de relevanță de 1 la sută, o posibilă explicație fiind modificarea în timp a coeficienților de corelație dintre activele incluse în portofoliu.
- Pe baza măsurilor *VaR* se calculează cerințele de capital aferente riscului de piață, cerințe ce se exprimă ca multipli ai valorii *VaR*.

# Concluzii

| Metodologie               | Rata de eroare<br>(la suta) |
|---------------------------|-----------------------------|
| <i>VaR analitic</i>       | 0.760                       |
| <i>VaR istoric</i>        | 0.598                       |
| <i>VaR CAPM</i>           | 7.442                       |
| <i>VaR EWMA</i>           | 0.489                       |
| <i>VaR GARCH</i>          | 0.724                       |
| <i>VaR GARCH analitic</i> | 1.689                       |



# **Calculul VaR pentru un portofoliu de opțiuni**

# Portofoliu

| Opțiune          | Call/Put:     | Preț de exercițiu | Barieră 1 | Barieră 2 | Scadență | Volatilitate | Poziție          | Notional (mil. EUR) | Primă (EUR) |            |         |
|------------------|---------------|-------------------|-----------|-----------|----------|--------------|------------------|---------------------|-------------|------------|---------|
| Double No Touch  | Payout în EUR |                   | 3.1900    | Out       | 3.4000   | Out          | Tue, 11 Dec 2007 | 5.128               | Short       | 1,000,000  | 217,500 |
| Vanilla          | EUR Put       | 3.25              |           |           |          |              | Tue, 11 Sep 2007 | 5.816               | Long        | 10,000,000 | 22,040  |
| Vanilla          | EUR Call      | 3.27              |           |           |          |              | Tue, 11 Sep 2007 | 5.816               | Long        | 10,000,000 |         |
| Vanilla          | EUR Put       | 3.2725            |           |           |          |              | Wed, 11 Jul 2007 | 5.888               | Long        | 10,000,000 | 38,171  |
| Double Knock Out | EUR Call      | 3.3534            | 3.1900    | Out       | 3.4050   | Out          | Tue, 11 Dec 2007 | 5.128               | Long        | 10,000,000 | 20,202  |
| Vanilla          | EUR Call      | 3.3532            |           |           |          |              | Thu, 6 Sep 2007  | 5.936               | Long        | 10,000,000 | 109,119 |
| Vanilla          | EUR Put       | 3.2205            |           |           |          |              | Thu, 6 Sep 2007  | 5.936               | Long        | 10,000,000 |         |
| Vanilla          | EUR Call      | 3.5064            |           |           |          |              | Thu, 5 Jun 2008  | 5.691               | Long        | 10,000,000 | 8,409   |
| Vanilla          | EUR Put       | 3.242             |           |           |          |              | Thu, 5 Jun 2008  | 5.691               | Short       | 10,000,000 |         |
| Forward          |               | 3.325869          |           |           |          |              | Tue, 11 Dec 2007 |                     | Long        | 6,000,000  |         |

|                    |             |
|--------------------|-------------|
| Valoare portofoliu | 233,146     |
| Delta              | -13,090,257 |
| Vega               | 56,626      |
| Gamma              | 7,523,093   |
| Theta              | -1,806      |
| Rho                | -66,025     |

# VaR prin simulare - metodologie

---

- Funcție de volatilitatea cursului *EUR/RON* și a volatilității cursului *EUR/RON* s-au calculat intervalele de variație, cu un orizont de o zi, cu o probabilitate de 99 la sută, a cursului de schimb și a volatilității cursului de schimb aferentă scadenței medii a portofoliului
- Pe baza celor două intervale de variație au fost generate scenarii de evoluție a cursului de schimb și a volatilității acestuia
- Pentru fiecare scenariu a fost calculat *P/L*-ul portofoliului de opțiuni.
- Măsura *VaR* pentru portofoliu, pentru un orizont de o zi, cu nivel de relevanță de 1 la sută a fost considerată ca fiind cea mai mare pierdere înregistrată de portofoliu.

# VaR prin simulare

|              | Spot              | 2.9651   | 3.0452  | 3.1254 | 3.2055  | 3.2856   | 3.3658  | 3.4459  |
|--------------|-------------------|----------|---------|--------|---------|----------|---------|---------|
| Volatilitate | Evolutie spot     | -7.50%   | -5.00%  | -2.50% | 0.00%   | 2.50%    | 5.00%   | 7.50%   |
| 1            | P/L<br>portofoliu | -163,961 | -47,630 | 46,837 | 30,829  | -46,393  | 378,435 | 801,353 |
| 0.5          |                   | -158,439 | -40,251 | 54,270 | 16,993  | -111,380 | 361,741 | 787,315 |
| 0            |                   | -150,314 | -32,585 | 62,634 | 0       | -189,498 | 345,194 | 770,568 |
| -0.5         |                   | -141,721 | -24,785 | 71,964 | -18,944 | -280,177 | 316,657 | 754,729 |
| -1           |                   | -148,734 | -31,030 | 64,428 | -4,330  | -206,018 | 339,831 | 767,126 |

VaR utilizând metodologia delta-gamma și considerând portofoliul delta-hedge-uit este – 423 213 EUR