

Modelul Merton
Aplicație pentru companii cotate la BVB

Adrian Codirlasu, CFA

Octombrie, 2007

Cuprins

1. MODELUL PORTFOLIOMANAGER	2
1.1. MODELUL DEZVOLTAT DE MERTON	2
1.2. ABORDAREA KMV	5
2. UTILIZAREA MODELULUI MERTON PENTRU GENERAREA PROBABILITĂȚILOR DE INTRARE ÎN FALIMENT PENTRU SOCIETĂȚI COTATE LA BVB	8
2.1. METODOLOGIE	8
2.2. REZULTATE	10
2.3. CONCLUZII	13
ANEXĂ COD MATLAB MODEL MERTON	14
BIBLIOGRAFIE	16

1. Modelul PortfolioManager

1.1. Modelul dezvoltat de Merton

Ideea aplicării teoriei opțiunilor pentru evaluarea creditelor și obligațiunilor este întâlnită în literatură începând cu anul 1974, începând cu articolul publicat de Robert Merton și dezvoltat ulterior de Galai și Masulis (1976).

Considerăm o firmă care finanțează achiziția de active (riscante), V , utilizând capitalul constituit de acționari, E , și emițând o obligațiune zero-cupon, cu valoare nominală (inclusiv dobânda acumulată) F și scadența T , a cărei valoare de piață este B . Împrumutul luat de firmă este supus riscului de credit – adică riscul ca la momentul T , valoarea activelor firmei, V_T , va fi mai mică decât valoarea (nominală) a creditului, F .

Riscul de credit există atâta timp cât probabilitatea de intrare în faliment, $P(V_T < F)$ este mai mare decât 0. Ca urmare, la momentul t_0 , $B_0 < F \cdot e^{-rt}$, adică *yield*-ul obligațiunii, y_T , este mai mare decât rata dobânzii fără risc, r , iar *spread*-ul datorat riscului de credit (*default spread*), spread care îi compensează pe deținătorii de obligațiuni pentru riscul asumat este $\pi = y_T - r$.

Dacă nu există fricțiuni (pe piață), taxe de tranzacționare și costuri implicate de falimentul firmei, atunci valoarea (de piață) prezentă a activelor firmei reprezintă suma dintre valoarea capitalului și a împrumutului: $V_0 \equiv E_0 + B_0$.

În consecință riscul de credit este o funcție de structura financiară a firmei:

- gradul său de îndatorare (*leverage*), $LR = \frac{F \cdot e^{-rT}}{V_0}$;
- volatilitatea randamentului activelor firmei, σ_V ;
- scadența datoriilor firmei, T .

Ideea de la care a pornit Merton (1974), este că dacă, la momentul T , $V_T < F$ atunci compania se află, cel puțin în teorie, în faliment, iar valoarea, de piață, a capitalului este 0. Dacă, la același moment $V_T > F$, atunci compania își va plăti datoriile iar valoarea capitalului său va fi $V_T - F$. Ca urmare, valoarea capitalului firmei la momentul T este:

$$E_T = \max(V_T - F, 0).$$

Deci, valoarea capitalului unei firme, E_t , poate fi considerată o opțiune call având ca activ suport valoarea de piață a activelor firmei, V_t și preț de exercițiu valoarea nominală a datoriilor firmei, F .

Adică, $E_t = f(V_t, F, \sigma_V, r, T - t)$, unde V_t și σ_V sunt variabile neobservabile.

Aplicând formula de evaluare a opțiunilor Black-Scholes (1973), rezultă:

$$E_0 = V_0 \cdot N(d_1) - F \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2),$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_0}{F} + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \cdot T.$$

Valoarea (de piață) a creditului este $V_0 - E_0$.

Probabilitatea neutră la risc ca firma să intre în faliment este $N(-d_2)$, dar pentru calcularea acesteia este nevoie de V_0 și σ_V , care sunt variabile neobservabile. Dar, dacă compania este tranzacționată la bursă, poate fi observată valoarea capitalului, E_0 și, aplicând leme lui Ito, poate fi estimată volatilitatea capitalului, σ_E :

$$\sigma_E \cdot E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \cdot \sigma_V \cdot V_0$$

sau

$$\sigma_E \cdot E_0 = N(d_1) \cdot \sigma_V \cdot V_0.$$

Construind un sistem de două ecuații simultane pe baza acestei relații și a ecuației prețului opțiunii, acesta poate fi rezolvat pentru obținerea valorilor V_0 și σ_V .

Galai și Masulis (1976) extind modelul lui Merton, și consideră că riscul de credit poate fi eliminat cumpărând o opțiune put, P , care are ca activ suport valoarea firmei, V , ca preț de exercițiu valoarea nominală a datoriilor firmei, F , și scadența T .

Dacă creditorul companiei achiziționează o asemenea opțiune, el elimină complet riscul de credit și transformându-și creditul inițial (riscant) într-un credit fără risc, cu valoarea nominală F .

Dacă rata fără risc este r , atunci, la echilibru, $B_0 + P_0 = F \cdot e^{-rT}$. Deci, costul opțiunii put este prețul plătit pentru eliminarea riscului de credit asociat creditului acordat firmei.

Conform modelului Black-Scholes (1973), prețul opțiunii P este dat de relația:

$$P_0 = -N(-d_1) \cdot V_0 + F \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2)$$

unde:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_0}{F} + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma_V \sqrt{T}} = \frac{\ln \frac{V_0}{F \cdot e^{-rT}} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_V^2 \cdot T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \cdot T.$$

Ca urmare, costul acoperirii riscului de credit depinde de gradul de risc al activelor firmei, σ_V , scadența datoriilor firmei, rata dobânzii fără risc, gradul de îndatorare al firmei.

Yield-ul datoriei firmei poate fi determinat după cum urmează:

$$y_T = -\frac{\ln \frac{B_0}{F}}{T} = -\frac{\ln \frac{F \cdot e^{-rT} - P_0}{F}}{T},$$

Iar *spread*-ul de credit, π_T , definit ca $\pi_T = y_T - r$, ținând cont de ecuația prețului opțiunii put P , este:

$$\pi_T = y_T - r = -\frac{1}{T} \ln \left(N(d_2) + \frac{V_0}{F \cdot e^{-rT}} \cdot N(-d_1) \right).$$

Deci, acesta este o funcție de gradul de îndatorare, volatilitatea activelor firmei și scadența datoriei.

Spread-ul de credit poate fi calculat ca o funcție a gradului de îndatorare, a volatilității activelor și a scadenței datoriilor.

1.2. Abordarea KMV

Pe baza modelului dezvoltat de Merton, compania *KMV* a dezvoltat o metodologie de estimare a probabilității de intrare în faliment (*estimated default frequency, EDF*). Această probabilitate este o funcție a structurii de capital a firmei, a volatilității randamentului activelor firmei și a valorii curente a acestora. Valoarea *EDF* specifică unei firme poate fi transpusă în orice sistem de rating pentru a rating-ul echivalent al debitorului respectiv.

Acest model (similar cu modelul *CreditRisk+* dezvoltat de Credit Suisse First Boston) se bazează pe paradigma *default mode*, adică evenimentul de credit luat în considerare este numai falimentul firmei. Ca urmare, spre deosebire de sistemul *Creditmetrics*, modelul *KMV* nu face referiri explicite asupra probabilităților de tranziție, care în metodologia *KMV*, sunt deja încorporate în măsura *EDF*.

Această metodologie este aplicată companiilor a căror valoare a capitalului este determinată de către piață (care sunt tranzacționate pe o bursă de valori), deoarece informația conținută în prețul acțiunilor și în bilanț poate fi translatată în riscul implicit de faliment.

Riscul de credit în această abordare este în mod esențial determinat de dinamica activelor firmei. Având structura de capital a firmei și specificând procesul stohastic pentru valoarea activelor firmei, se poate determina probabilitatea curentă de intrare în faliment pentru orice orizont de timp.

Derivarea probabilităților de faliment efective este realizată în trei pași:

- Estimarea valorii de piață și a volatilității activelor firmei,
- Calcularea distanței față de faliment, care este o măsură a riscului de faliment,
- Scalarea distanței față de faliment pentru obținerea probabilităților efective de faliment, pe baza unei baze de date care cuprinde incidentele de faliment.

Presupunând o firmă care se finanțează pe baza capitalului E_t și a emisiunii unui instrument de credit zero cupon, cu scadența T , valoarea nominală F și valoarea de piață B_t , bilanțul acestei firme poate fi reprezentat după cum urmează:

$$V_t = B_t(F) + E_t,$$

unde V_t reprezintă valoarea activelor firmei.

Modelul presupune că falimentul se produce numai la scadența obligației de plată, atunci când valoarea activelor este inferioară datoriei (F). De asemenea, modelul presupune că valoarea activelor companiei urmează o mișcare browniană geometrică iar distribuția valorii activelor la maturitatea obligațiunii este:

$$E(V_T) = V_0 e^{\mu T}$$

$$V_T = V_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T} Z_T}$$

Structura de capital a firmei este considerată a fi compusă din capital social, datorii pe termen scurt (considerate a fi echivalente cu numerarul), datorii pe termen lung (perpetuități) și acțiuni preferențiale convertibile.

Pe baza acestor ipoteze se poate găsi o soluție analitică pentru valoarea capitalului E , și volatilitatea acesteia, σ_E :

$$E = f(V, \sigma_V, LR, c, r)$$

$$\sigma_S = g(V, \sigma_V, LR, c, r)$$

unde:

LR reprezintă gradul de îndatorare în structura de capital,

c – cuponul mediu plătit pentru datoriile pe termen lung,

r – rata dobânzii fără risc,

V – valoarea activelor companiei,

σ_v – volatilitatea randamentelor activelor.

Având în vedere că numai valoarea de piață a capitalului este observabilă, valoarea activelor poate fi obținută din relația valorii acțiunilor:

$$V = f(E, \sigma_v, LR, c, r).$$

Pe baza analizei unui eșantion de câteva sute de companii, *KMV* a ajuns la concluzia că falimentul firmei apare atunci când valoarea activelor atinge un nivel care se află între valoarea totală a datoriilor și valoarea datoriilor pe termen scurt. Din această cauză, *KMV* a implementat o etapă intermediară înaintea calculării probabilităților de faliment.

Astfel, este calculat un indice, numit distanța până la faliment (*distance to default*), *DD*, care este numărul de deviații standard dintre media distribuției valorii activelor și un prag critic, momentul falimentului (care reprezintă valoarea nominală a datoriilor curente, incluzând datoriile pe termen scurt și jumătate din datoriile pe termen lung).

Notând cu:

STD – datoriile pe termen scurt,

LTD – datoriile pe termen lung,

$$DPT – \text{momentul falimentului, } DPT = STD + \frac{1}{2} LTD,$$

distanța până la faliment (*DD*), care reprezintă distanța dintre valoarea așteptată a activelor într-un orizont de un an, $E(V_1)$ și punctul falimentului, *DPT*, exprimată în deviații standard ale randamentului activelor, este:

$$DD = \frac{E(V_1) - DPT}{\sigma_v}.$$

Presupunând ca valoarea activelor are o distribuție log-normală, distanța până la faliment la momentul T este:

$$DD = \frac{\ln \frac{V_0}{DPT_T} + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_v^2 \right) T}{\sigma_v \sqrt{T}}$$

unde:

V_0 reprezintă valoarea de piață curentă a activelor firmei,
 DPT_T – punctul falimentului la finalul orizontului T ,
 μ – randamentul așteptat al activelor minus ieșirile de numerar,
 σ_v – volatilitatea anualizată a activelor.

De aici rezultă că suprafața în care firma este în faliment este $N(-DD)$.

Ultima fază constă în maparea distanței până la faliment în probabilități efective de faliment pentru un anumit orizont de timp, probabilități numite frecvențe așteptate de faliment (*expected default frequencies, EDF*).

Pe baza unui eșantion de companii, care include și firme care au intrat în faliment, se poate estima, pentru fiecare orizont de timp, proporția de companii care pentru o anumită valoare a indicatorului DD , au intrat în faliment.

2. Utilizarea modelului Merton pentru generarea probabilităților de intrare în faliment pentru societăți cotate la BVB

2.1. Metodologie

Utilizând metodologia dezvoltată de Merton pentru determinarea probabilităților de intrare în faliment a companiilor cotate la o bursă de valori (Capitolul V.2.), au fost estimate probabilitățile neutre la risc de intrare în faliment în următorul an, a companiilor cotate la categoria I-a a Bursei de Valori București. Analiza a fost realizată pe date trimestriale pe intervalul trim. IV 1998 – trim. III 2006.

Date de intrare:

- valoarea contabilă a activelor companiei,
- valoarea contabilă a datoriilor companiei,
- valoarea de piață a capitalului companiei, calculată pe baza numărului de acțiuni emise de societate și a prețului de piață al acțiunii,

- volatilitatea anuală a prețului acțiunii (ca proxy pentru volatilitatea valorii de piață a capitalului) calculată pe baza regulii $\sigma\sqrt{t}$, unde σ este volatilitatea zilnică a acțiunii și t este numărul de zile (250),
- rata medie a dobânzii pentru tranzacțiile efectuate pe piața monetară, ca proxy pentru rata fără risc.

Companiile analizate sunt:

- Alro Slatina (ALR),
- Antibiotice (ATB),
- Azomureș (AZO),
- Impact (IMP),
- Olchim (OLT),
- SNP Petrom (SNP),
- Turbomecanica (TBM),
- SIF1,
- SIF2,
- SIF3,
- SIF4,
- SIF5.

Probabilitățile de intrare în faliment au fost generate utilizând programul Matlab. Procedurile Matlab utilizate sunt prezentate în Anexa I.

Pentru determinarea probabilităților de intrare în faliment, este necesară o ipoteză privind volatilitatea activelor companiilor. Aceasta a fost considerată a avea valori între 20 și 40 la sută.

2.2. Rezultate

Probabilitățile neutre la risc obținute sunt prezentate în tabelele de mai jos.

Probabilitățile de intrare în faliment pentru orizontul de un an pentru companiile cotate la categoria I a BVB

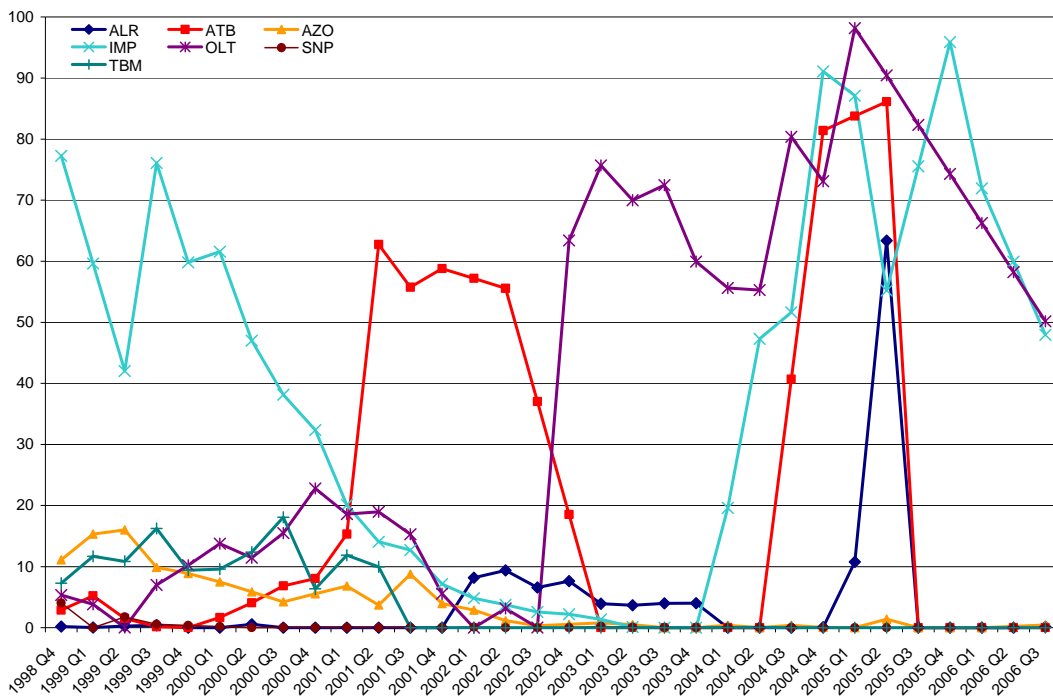
	ALR	ATB	AZO	IMP	OLT	SNP	TBM
1998 Q4	0.19	2.86	11.10	77.27	5.32	4.03	7.28
1999 Q1	0.04	5.20	15.33	59.65	3.82	0.00	11.68
1999 Q2	0.24	1.50	15.99	42.03	0.04	1.75	10.84
1999 Q3	0.40	0.14	9.88	76.10	6.99	0.56	16.25
1999 Q4	0.00	0.00	8.87	59.81	10.21	0.37	9.40
2000 Q1	0.00	1.65	7.50	61.59	13.76	0.19	9.58
2000 Q2	0.55	4.08	5.85	47.00	11.43	0.00	12.37
2000 Q3	0.00	6.86	4.22	38.14	15.48	0.02	18.07
2000 Q4	0.00	8.05	5.54	32.36	22.78	0.00	6.34
2001 Q1	0.00	15.31	6.82	20.09	18.60	0.03	11.88
2001 Q2	0.00	62.74	3.69	14.05	18.96	0.00	9.95
2001 Q3	0.00	55.76	8.77	12.71	15.29	0.00	0.00
2001 Q4	0.00	58.80	3.96	7.14	5.56	0.00	0.00
2002 Q1	8.18	57.19	2.87	4.81	0.00	0.09	0.00
2002 Q2	9.36	55.57	1.15	3.72	3.16	0.00	0.00
2002 Q3	6.57	37.05	0.30	2.56	0.02	0.00	0.00
2002 Q4	7.63	18.52	0.57	2.19	63.39	0.00	0.00
2003 Q1	3.91	0.01	0.77	1.35	75.70	0.23	0.00
2003 Q2	3.66	0.02	0.49	0.09	69.99	0.07	0.00
2003 Q3	3.97	0.01	0.00	0.00	72.45	0.00	0.00
2003 Q4	4.01	0.00	0.00	0.00	59.94	0.00	0.00
2004 Q1	0.01	0.00	0.39	19.62	55.62	0.00	0.02
2004 Q2	0.00	0.00	0.00	47.29	55.30	0.00	0.05
2004 Q3	0.00	40.71	0.40	51.64	80.38	0.00	0.01
2004 Q4	0.06	81.42	0.04	91.10	73.10	0.00	0.00
2005 Q1	10.75	83.78	0.00	87.12	98.19	0.00	0.00
2005 Q2	63.38	86.13	1.39	55.21	90.43	0.00	0.00
2005 Q3	0.00	0.00	0.00	75.56	82.32	0.00	0.00
2005 Q4	0.00	0.00	0.00	95.91	74.30	0.00	0.00
2006 Q1	0.00	0.00	0.00	71.93	66.27	0.00	0.00
2006 Q2	0.00	0.00	0.22	59.94	58.23	0.00	0.00
2006 Q3	0.11	0.00	0.44	47.96	50.18	0.00	0.00

**Probabilitățile de intrare în faliment pentru orizontul de un an
pentru societățile de investiții financiare**

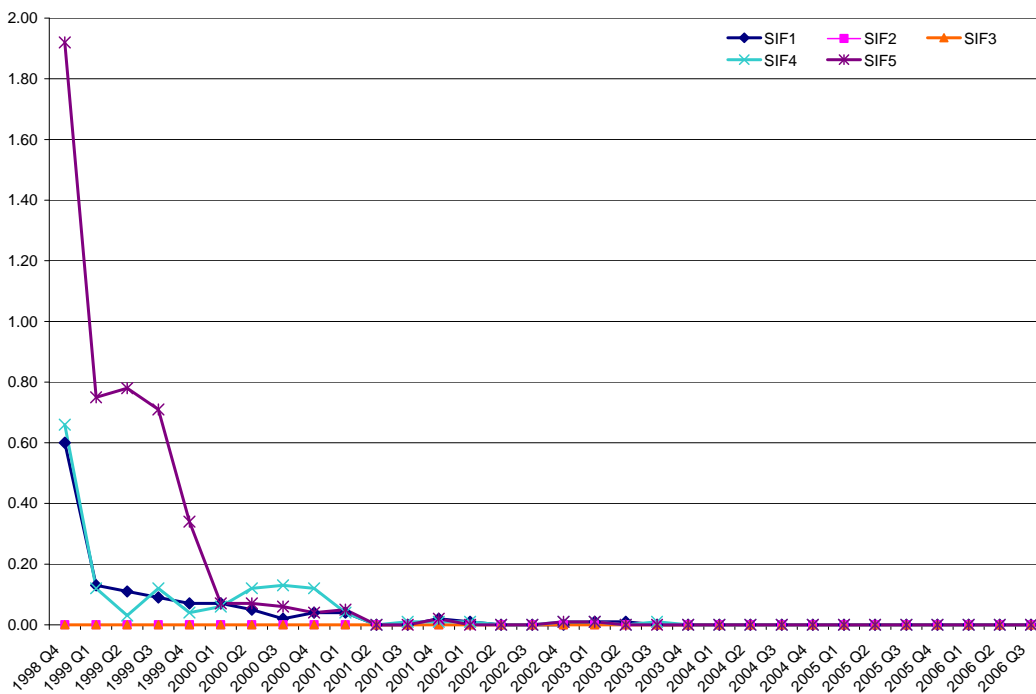
la sută

	SIF1	SIF2	SIF3	SIF4	SIF5
1998 Q4	0.60	0.00	0.00	0.66	1.92
1999 Q1	0.13	0.00	0.00	0.12	0.75
1999 Q2	0.11	0.00	0.00	0.03	0.78
1999 Q3	0.09	0.00	0.00	0.12	0.71
1999 Q4	0.07	0.00	0.00	0.04	0.34
2000 Q1	0.07	0.00	0.00	0.06	0.07
2000 Q2	0.05	0.00	0.00	0.12	0.07
2000 Q3	0.02	0.00	0.00	0.13	0.06
2000 Q4	0.04	0.00	0.00	0.12	0.04
2001 Q1	0.04	0.00	0.00	0.04	0.05
2001 Q2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2001 Q3	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
2001 Q4	0.02	0.00	0.00	0.01	0.02
2002 Q1	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
2002 Q2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2002 Q3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2002 Q4	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
2003 Q1	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01
2003 Q2	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
2003 Q3	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
2003 Q4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2004 Q1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2004 Q2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2004 Q3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2004 Q4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2005 Q1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2005 Q2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2005 Q3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2005 Q4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2006 Q1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2006 Q2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2006 Q3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

**Probabilitățile de intrare în faliment pentru orizontul de un an
pentru companiile cotate la categoria I a BVB**



**Probabilitățile de intrare în faliment pentru orizontul de un an
pentru societățile de investiții financiare**



2.3. Concluzii

Conform rezultatelor:

- Societățile de investiții financiare au cele mai reduse probabilități de intrare în faliment. Rezultatele sunt consistente cu situația financiară a acestora: portofolii diversificate și un grad redus de îndatorare (în perioada analizată raportul dintre datorii și active a variat între 3 și 25 la sută).
- Dintre acțiunile listate la categoria I a BVB cele mai mici probabilități de intrare în faliment le-a avut SNP Petrom.
- Cele mai ridicate probabilități de intrare în faliment au fost înregistrate de Oltchim (OLT). Compania, în perioada 2001 – 2004 a avut capitalul negativ (a fost în faliment tehnic).
- Probabilități ridicate au fost înregistrate și de către Impact (IMP). Această societate, dorind o extindere agresivă, și-a finanțat activitatea prin credite, gradul său de îndatorare fiind în medie, în perioada analizată, de aproximativ 50 la sută.

Anexă Cod Matlab model Merton

Procedura Matlab pentru modelul lui Merton

```
function [pd yy]=merton2(F,r,E,sigma_E,guess)

%x(1)- active

%x(2)- volatilitatea activelor

%constante: F - datoriile totale, E - valoarea de piata a capitalului,
r-rata dobanzii,

%t-time to default,sigma_E-volatilitatea capitalului

%X-sistemul de ecuatii

%guess-vector cu valori initiale pentru active si volatilitatea
activelor

t=1;

options.MaxFunEvals=100000;

for i=1:length(F)

X=@(x)[x(1)*normcdf((log(x(1))/F(i))+r(i)+1/2*exp(x(2))^2)*t)/(exp(x(2)
)*t^.5))-F(i)*exp(-
r(i)*t)*normcdf((log(x(1))/F(i))+r(i)+1/2*exp(x(2))^2)*t)/(exp(x(2))*t^
.5)-exp(x(2))*t^.5)-E(i);

exp(x(2))*x(1)/E(i)*normcdf((log(x(1))/F(i))+r(i)+1/2*exp(x(2))^2)*t)/(
exp(x(2))*t^.5))-sigma_E(i)];
y=fsolve(X,guess(i,:),options);

    %PD= 1-N(d2)
    pd(i)=1-
normcdf((log(y(1))/F(i))+r(i)+1/2*exp(y(2))^2)*t)/(exp(y(2))*t^.5)-
exp(y(2))*t^.5);

    yy(i)=[exp(y(2))];

end
```

Cod Matlab pentru generarea probabilităților de intrare în faliment

```
d=xlsread('date merton',2);
n = size(d,1);
F=d(1:n,2);
r = d(1:n,9);
E = d(1:n,7);
sigma = d(1:n,8); %volatilitatea pretului actiunii
guess = [(d(1:n,1)), log(0.2)*ones(size(d(1:n,:),1),1)];
[pd y] = merton2(F, r/100, E, sigma, guess);
%Output
%pd - probabilitatea de intrare in faliment intr-un orizont de un an
%y - volatilitatea implicita a activelor
```


Bibliografie

- [1] Crosbie, Peter și Jeff Bohn (2003) „Modeling Default Risk”, Moody’s KMV.
- [2] Crouhy, Michel, Dan Galai și Robert Mark (2001) „Risk Management”, McGraw-Hill.
- [3] Jorion, Philippe (2003) „Financial Risk Manager Handbook, Second Edition”, John Wiley & Sons.
- [4] Lore, Mark și Lev Borodovsky editori (2000) „The Professional Handbook of Financial Risk Management”, Butterworth Heinemann.