Teoria piețelor fractale

1. EMH şi FMH

Ipoteza piețelor eficiente

Deşi datează de la începutul secolului, conceptul de piață eficientă, în ultimii 30 de ani este fundația pentru cercetarea teoriei piețelor financiare. În 1900, Louis Bachelier a postulat modelul mişcării (paşilor) aleatori: "Random Walk" sau "Fair Game", care a fost retipărit în engleză în 1964 în lucrarea lui Paul Cootner: "The Random Character of Stock Market Prices" ("Caracterul aleator al cursului bursier")[1].

Conceptul de eficiență a pieței se referă la informație: la un anumit moment, prețurile reflectă toate informațiile disponibile. Aceasta implică că nici o prelucrare, oricât de adâncă ar fi ea, nu poate previziona cursurile viitoare.

Au fost postulate trei tipuri de piețe eficiente, numite de Fama în 1965: slabă ("weak form"), semitare ("semistrong form") şi tare ("strong form"). Conform formei de eficiență slabă, în cursul bursier sunt reflectate informațiile trecute. Conform formei semitare, toate informațiile făcute publice sunt încorporate în cursul bursier, în timp ce în forma tare, ca o extensie a celor două, sunt incluse toate informațiile (inclusiv informațiile confidențiale - "insider information") în cursul bursier.
De-a lungul timpului, modelul semitare a devenit standardul acceptat.

Premisele conceptului de piețe eficiente sunt:
- Investitorii sunt raționali. Investitorii au aversiune față de risc şi doresc active care au ce mai mare randament pentru un anumit nivel de risc.
- Piețele sunt eficiente. Cursurile curente reflectă toate informațiile disponibile sau publice.
- Randamentele sunt independente. Schimbările cursurilor pot fi determinate numai de noi informații. Randamentul din ziua t este necorelat cu randamentul din ziua t+1.
- Piețele au o mişcare a paşilor aleatori ("random walk"). Probabilitatea distribuției randamentelor este aproximativ aceeaşi cu distribuția normală (clopotul lui Gauss).

Dar, în realitate, premisele care stau la baza teoriei piețelor eficiente nu sunt reale: investitorii nu au întotdeauna aversiune față de risc şi de asemenea, ei nu reacționează la informații imediat, ci, în multe cazuri, reacționează târziu, ghidându-se după trend (care încorporează informațiile trecute) în strategiile prezente. Oamenii nu întotdeauna se comportă într-un mod linear la informațiile noi, încorporându-le imediat, aşa cum necesită EMH; oamenii se comportă neliniar.
Din această cauză, premisa că investitorii sunt raționali şi, deci, modificările cursurilor sunt independente şi piețele au o mişcare a paşilor aleatori nu pot fi acceptate. Asimilarea neregulată a informației, aşa cum se întâmplă în realitate, poate conduce la o <u>tendință</u> de mişcare aleatoare – "biased random walk", numită serie de timp fractală.

---

[1] **Mark Sales, David McLaughlin, Fractals in Financial Markets, http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/main.html**

Mişcarea browniană

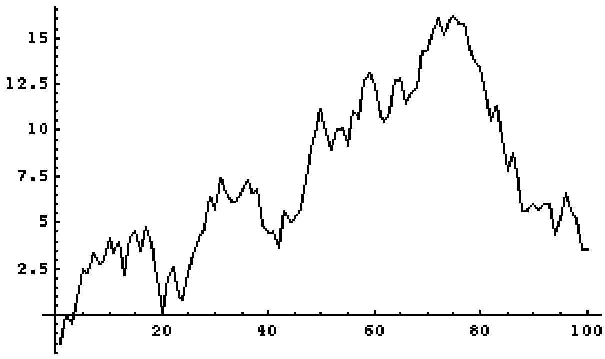
Modelul EMH consideră că randamentele pieței au o mişcare în paşi aleatori ("random walk") sau o mişcare browniană.

Schimbarea unei variabile browniene variază aleator, deci:

- Mişcarea la un moment dat este independentă de mişcarea la orice alt moment în timp – variabila nu are memorie.
- Schimbarea aşteptată în timp este zero – variabila nu are o anumită direcție de evoluție.
- Valoarea aşteptată a schimbării (de la un moment la altul) este mai mare de zero.

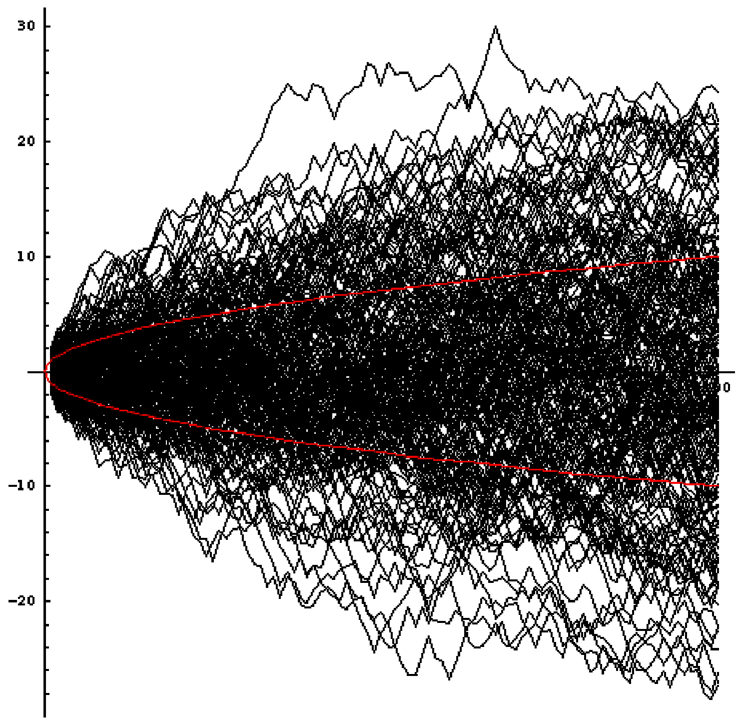
Exemple:

- Exemplu tipic de random walk sau mişcare browniană:



(sursa: http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/)

- Un număr mare de traiectorii random walk suprapuse. Linia roşie reprezintă rădăcina pătrată a timpului:



(sursa: http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/)

Din acest grafic, se observă că, în medie, mişcarea aleatoare ("random walk") tinde să devieze din origine cu o cantitate proporțională cu rădăcina pătrată a timpului.

Testarea ipotezelor random walk pentru BVB

Pentru verificarea ipotezei independentei randamentelor din zile diferite calculăm coeficienții de autocorelație pentru BET si BET-C.

Acestia sunt dati in tabelele de mai jos:

Correlogram of BET

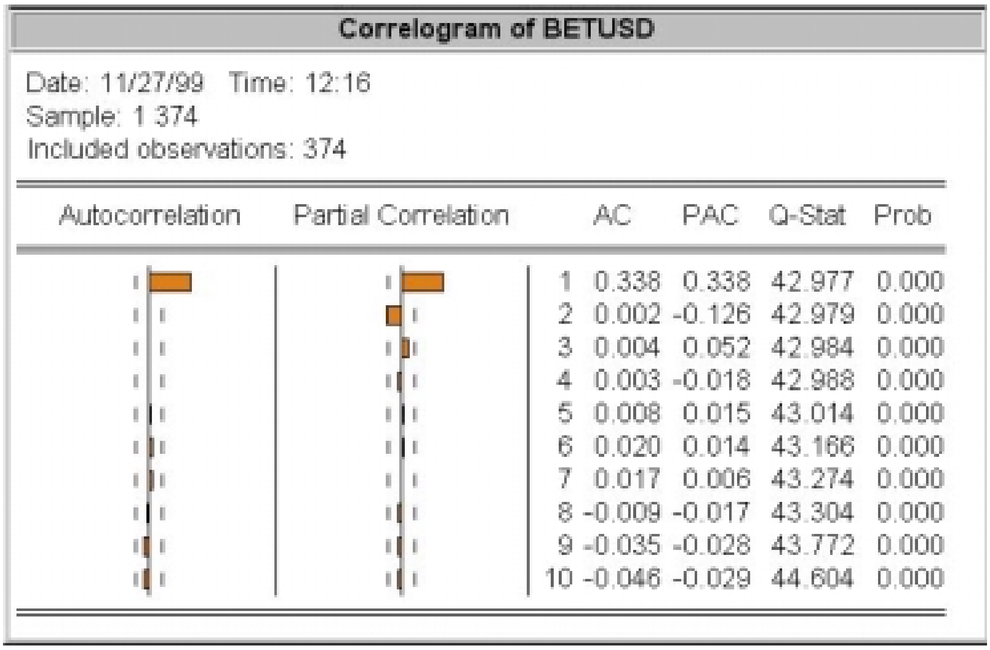
Date: 11/27/99 Time: 12:11
Sample: 1 374
Included observations: 374

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.346	0.346	45.186	0.000
		2	0.020	-0.113	45.338	0.000
		3	0.016	0.054	45.431	0.000
		4	0.021	-0.001	45.605	0.000
		5	0.010	0.004	45.645	0.000
		6	0.029	0.029	45.958	0.000
		7	0.036	0.017	46.449	0.000
		8	0.000	-0.020	46.449	0.000
		9	-0.028	-0.022	46.759	0.000
		10	-0.035	-0.021	47.221	0.000

Correlogram of BETUSD

Date: 11/27/99 Time: 12:16
Sample: 1 374
Included observations: 374

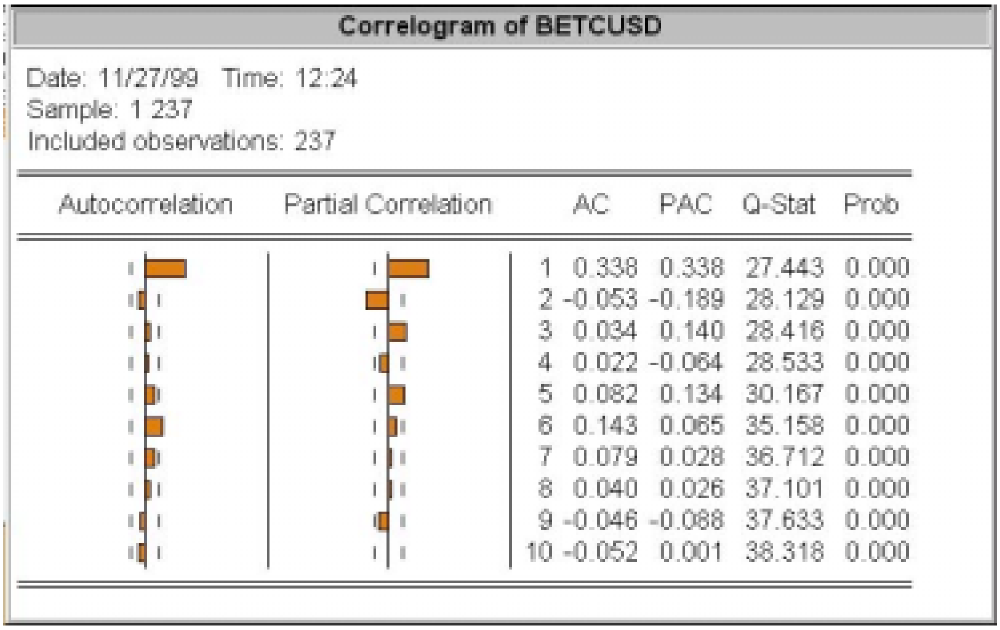
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.338	0.338	42.977	0.000
		2	0.002	-0.126	42.979	0.000
		3	0.004	0.052	42.984	0.000
		4	0.003	-0.018	42.988	0.000
		5	0.008	0.015	43.014	0.000
		6	0.020	0.014	43.166	0.000
		7	0.017	0.006	43.274	0.000
		8	-0.009	-0.017	43.304	0.000
		9	-0.035	-0.028	43.772	0.000
		10	-0.046	-0.029	44.604	0.000



Correlogram of BETUSD

Date: 11/27/99 Time: 12:16
Sample: 1 374
Included observations: 374

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.338	0.338	42.977	0.000
2	0.002	-0.126	42.979	0.000
3	0.004	0.052	42.984	0.000
4	0.003	-0.018	42.988	0.000
5	0.008	0.015	43.014	0.000
6	0.020	0.014	43.166	0.000
7	0.017	0.006	43.274	0.000
8	-0.009	-0.017	43.304	0.000
9	-0.035	-0.028	43.772	0.000
10	-0.046	-0.029	44.604	0.000



Correlogram of BETCUSD

Date: 11/27/99 Time: 12:24
Sample: 1 237
Included observations: 237

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.338	0.338	27.443	0.000
2	-0.053	-0.189	28.129	0.000
3	0.034	0.140	28.416	0.000
4	0.022	-0.064	28.533	0.000
5	0.082	0.134	30.167	0.000
6	0.143	0.065	35.158	0.000
7	0.079	0.028	36.712	0.000
8	0.040	0.026	37.101	0.000
9	-0.046	-0.088	37.633	0.000
10	-0.052	0.001	38.318	0.000

Se observă ca corelatţia dintre radamentul dintr-o perioada şi randamentul din perioada anterioară este semnificativ pentru BET şi BET-C, ceea ce contrazice ipotezarandom walk.

Coeficientul de autocorelatie al unei serii y cu lag de k este :

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} (y_t - \overline{y})(y_{t-k} - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \overline{y})^2}$$, unde $\overline{y}$ este media seriei.

Coeficientul de autocorelatie de lag k este coeficientul de regresie a lui y_{t-k}, atunci cand y_t este regresat după o constantă, $y_{t-1},..., y_{t-k}$.

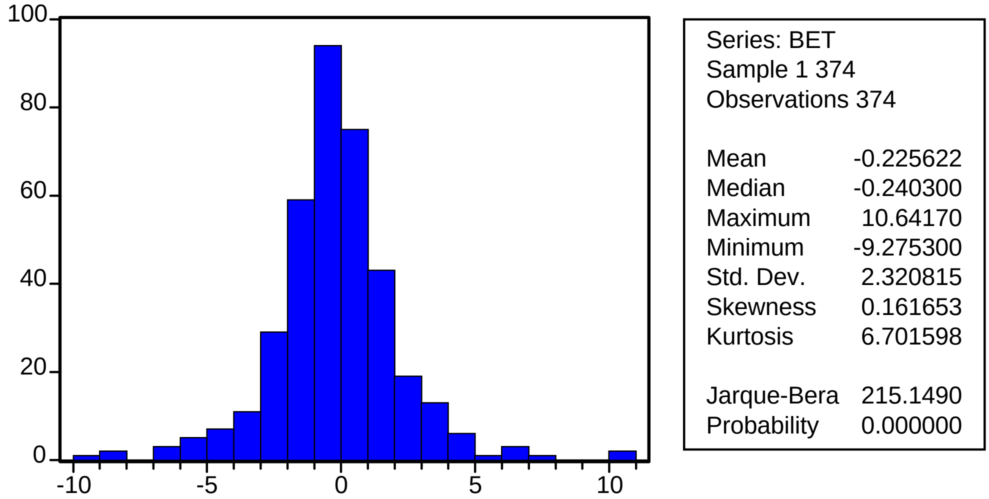
Coeficientul de autocorelaţie se calculează recursiv:

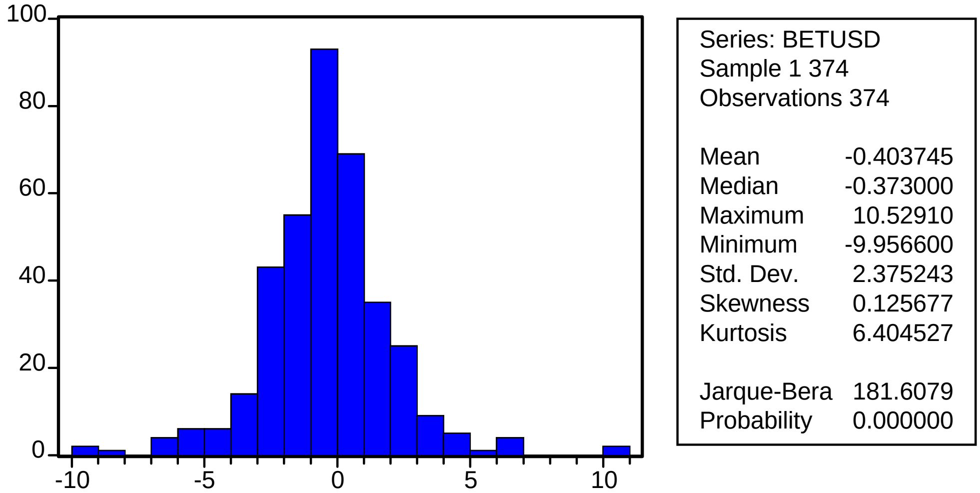
$$\phi_k = \begin{cases} r_1, daca, k = 1 \\ \dfrac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} r_j}, daca, k \rangle 1 \end{cases}$$

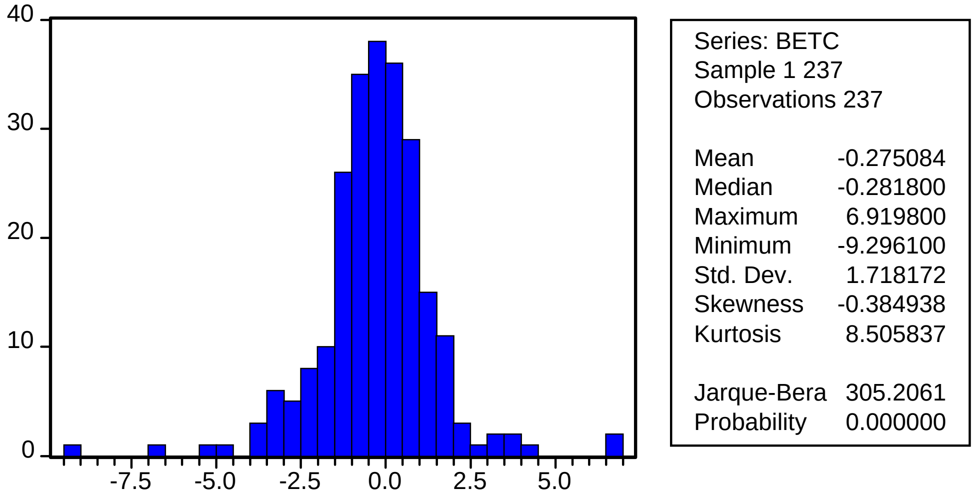
unde r_k este coeficientul de autocorelație estimat pentru un lag k şi $\phi_{k,j} = \phi_{k,j-1} - \phi_k \phi_{k-1,j-1}$.

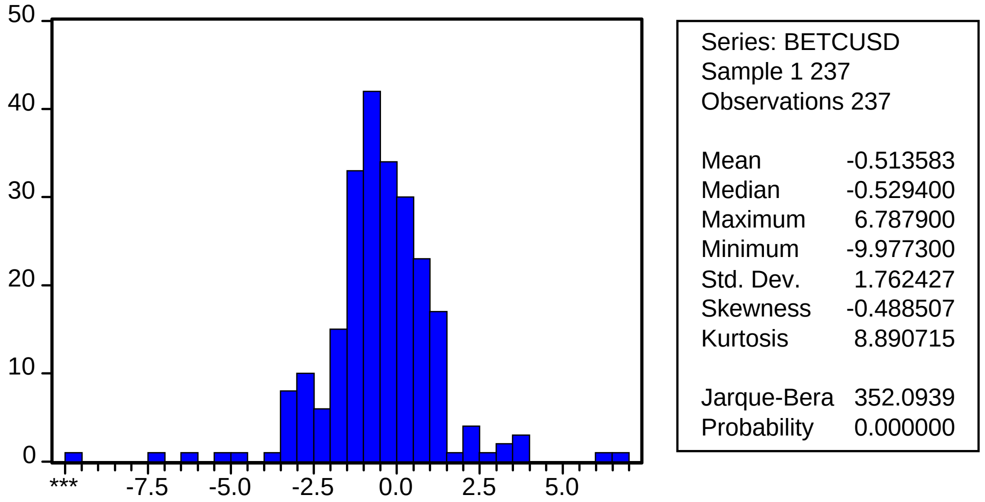
Q-statistic de lag k este testul statistic de ipoteză nulă, că nu este nici o autocorelație până la ordinul k şi se calculează: $Q_{LB} = T(T+2)\sum_{j=1}^{k} \frac{r_j^2}{T-j}$, unde T este numărul de observații.

Testarea distribuției normale:









Skewness măsoară asimetria distribuției seriei în jurul mediei sale. Se calculează ca: $S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{y_i - \overline{y}}{\hat{\sigma}})^3$, unde $\hat{\sigma}$ este estimator al varianței. S pentru o distribuție simetrică (de exemplu, distribuția normală) este 0. Un S pozitiv arată că distribuția are partea dreaptă alungită, iar un S negativ implică faptul că distribuția are partea stângă alungită. Distribuția randamentelor zilnice ale BET are S > 0, iar BETC are S < 0.

Kurtotica măsoară căt de ascuțită sau plată este distribuția seriei față de distribuția normală. Se calculează ca $K = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{y_i - \overline{y}}{\hat{\sigma}})^4$, unde $\hat{\sigma}$ este estimator al varianței. Kurtotica unei distribuții normale este 3. Dacă kurtotica are o valoare mai mare de 3, distribuția analizată este mai ascuțită decat distribuția normală (leptokurtotică). Dacă este mai mică decât 3, distribuția este mai plată decât distribuția normală (platykurtotică).
Având kurtotica de 6 şi respectiv 8, BET şi BETC au o distribuție leptokurtotică.

Jarque-Bera este un test statistic efectuat pentru a determina dacă o serie este distribuită normal. Testul statistic măsoară diferența dintre S şi K unei serii cu cele ale distribuției normale. Se calculează: $JB = \frac{N-k}{6}\left(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2\right)$, unde k reprezintă numărul de coeficienți folosiți pentru a crea seria.

Sub ipoteza nulă de existență a distribuției normale, testul Jarque-Bera este distribuit chi 2 cu 2 grade de libertate. Probabilitatea calculată reprezntă probabilitatea ca testul Jarque-Bera să depăşască în valoare absolută valoarea din ipoteza nulă (o probabilitate mică duce la respingerea ipotezei nule de existență a unei distribuții normale). Cum probabilitatea pentru BET şi BETC este 0, distribuția nu este normală.

Ipoteza piețelor fractale

Principalul motiv pentru utilizarea conceptului de piețe eficiente este justificarea folosirii calculului probabilistic în analiza piețelor financiare. De fapt, piețele sunt **sisteme dinamice neliniare**, şi, datorită acestui fapt, folosirea modelelor statistice pentru analiza datelor standard random walk generează rezultate greşite.

Un sistem neliniar este un sistem care are o rată a schimbării care nu este constantă. Majoritatea sistemelor din lumea reală sunt neliniare. Având o rată a schimbării care nu este constantă înseamnă că sistemul se schimbă la o rată variabilă (schimbătoare), ceea ce se întâmplă şi cu cursul bursier.

Studiul sistemelor neliniare se face prin teoria haosului. Sistemele neliniare sunt caracterizate prin imposibilitatea predictibilității (ca de exemplu vremea, populația, cursul bursier etc.). teoria haosului încearcă să descopere cum funcții simple, predictibile pot duce la rezultate impredictibile. Prin intermediul descoperirilor teoriei haosului, se poate înțelege cum sisteme care înainte erau considerate a fi complet haotice, acum au modele predictibile.
Teoria haosului a luat ființă în 1960. Unul dintre primii cercetători a fost profesorul MIT – Edward Lorenz.

Şi în finanțe este folosită teoria haosului pentru previzionarea evoluției piețelor financiare. Dacă piețele financiare tind să evolueze într-o anumită direcție o perioadă lungă de timp, cursurile nu urmează o mişcare random walk aşa cum rezultă din EMH. În loc să varieze după distribuția normală a lui Gauss, randamentele piețelor financiare sunt **leptokurtotice**. O distribuție leptokurtotică este acea distribuție în care apariția evenimentului Et este o funcție de Et-1.
Un studiu al lui Peters (din 1991), care analizează schimbările cursurilor S&P 500 din perioada 1928 – 1989, arată că piețele bursiere sunt leptokurtotice[2]. Aceasta implică că informația nu este imediat reflectată în cursul bursier în forma semitare a EMH.

Dacă piețele bursiere au o distribuție leptokurtotică, pentru previzonarea prețurilor viitoare poate fi utilizată teoria fractală.

Un fractal este un obiect cu un număr de dimensiuni care nu este întreg (fracțional). Se ştie că o linie are dimensiunea 1, un dreptunghi – dimensiunea 2 şi spațiul dimensiunea 3. De exemplu, un fractal poate avea dimensiunea 2.3, sau 1.7 sau 0.5. Un exemplu este o bucată de hârtie mototolită care are o dimensiune fractală estimată la 2.5: privită din anumite unghiuri

[2] **Mark Sales, David McLaughlin, Fractals in Financial Markets, http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/main.html**

pare bidimensională, şi din altele tridimensională. Orice punct al unui fractal este o funcție a punctelor înconjurătoare.
În Anexă sunt prezentați diferiți fractali.

Similar, pentru o piață financiară leptokurtotică, fiecare curs (preț) este o funcție a cursurilor trecute. Peters a estimat că indicele S&P 500 are o dimensiune fractală de 2.3. Aceasta implică că trei variabile pot prezice cu acuratețe mişcările pieței. Dar, având în vedere că piețele se află într-o mişcare continuă, aceste trei variabile se schimbă constant.

Concluziile teoriei piețelor fractale sunt:

- Piața este stabilă atunci când în cadrul ei acționează investitori care au orizonturi de timp diferite. Datorită acestui fapt există o lichiditate mare.
- Mulțimea informațiilor este legată mai mult de atitudinea pieței şi de factori tehnici pe termen scurt (informații obținute prin analiză tehnică) decât pe informații valabile pe termen lung (obținute pe baza analizei fundamentale). Cu cât orizontul de timp creşte, domină informațiile fundamentale pe termen lung (informațiile obținute pe baza analizei fundamentale). Astfel, schimbările prețului por reflecta informații importante numai pentru acel orizont de timp.
- Dacă apare un eveniment care face discutabilă validitatea unei informații fundamentale, investitorii pe termen lung ori îşi opresc participarea pe piață, ori încep să tranzacționeze pe baza mulțimii informațiilor pe termen scurt (atitudinea pieței şi informații tehnice). În momentul în care toate orizonturile de investiție se îngustează la un nivel uniform, piața devine instabilă. Nu mai sunt investitori pe termen lung care să stabilizeze piața oferind lichiditate investitorilor pe termen scurt.
- Prețurile reflectă o combinație de informații legate de analiza tehnică (pe termen scurt) şi analiza fundamentală (pe termen lung). Din această cauză, schimbările prețurilor pe termen scurt sunt mai volatile sau mai zgomotoase ("noisier") decât cele pe termen lung. Trendul de bază al pieței reflectă schimbările în veniturile aşteptate, bazate pe schimbările climatului economic. Trendurile pe termen scurt sunt rezultatul comportamentului de grup ("crowd behaviour"). Nu există nici un motiv de a crede că lungimea (durata) trendului pe termen scurt are vreo legătură cu trendul economic de bază.
- Dacă o acțiune nu are nici o legătură cu ciclul economic, atunci nu va exista trend pe termen lung. Lichiditatea, informațiile pe termen scurt şi cele legate de tranzacționare vor domina.

În continuare este prezentat modelul pe baza căruia se ajunge la aceste concluzii.

2. Analiza R/S (analiza distanței regradate)

Această tehnică a fost descrisă de Mandelbrot, Hurst, Feder şi cel mai recent de Peters şi este una dintre cele mai robuste metode de analiză a datelor considerate a fi negaussiene.

Analiza poate fi aplicată oricărui set de date care variază în raport cu timpul. Principiile acestei analize sunt:

- Principiul 1: Datele pot fi afectate de trendurile precedente (de scurtă sau lungă durată). Din acest motiv, o anumită valoare poate să nu fie independentă de valorile anterioare.
- Principiul 2: În timp, efectele acestor trenduri vor produce fie fluctuații mai mari, fie fluctuații mai mici decât cele datorate mişcării browniene.

Dând o formă acestor principii, scopul este de o analiză precis definită care extrage informațiile semnificative despre "*memoria*" seriei de timp.

Pentru analiză se folosesc următoarele date:

1. indicele scării de timp ("time-scale index"): **n**.
Analiza R/S utilizează principiul 1, definind un parametru "n" ca fiind un fel de indice al scării de timp pentru perioade de lungime n. Pentru fiecare n, datele sunt partiționate în grupuri adiacente de lungime n, şi se face media datelor analizate pentru fiecare din aceste grupe. Deci, grupând datele în acest mod, indicele n măsoară proprietățile caracteristice ale datelor pentru o scară de timp de lungime n. De aici rezultă că indicele poate fi folosit pentru a arăta memoria sistemului pe perioade de timp de lungime n.

2. Intervalul ("range")
În general, intervalul este definit ca fiind distanța maximă dintre două puncte dintr-un şir. Pentru un sistem în care intervalele de timp variază, aceasta reprezintă distanța dintre două puncte cele mai îndepărtate acoperite într-o perioadă de timp. Analiza R/S utilizează principiul 2 comparând lungimea unei variabile cu lungimea aceleiaşi variabile în condițiile unei mişcări browniene.

3. Intervalul regradat ("rescaled range")
Intervalul este împărțit cu deviația standard a seriei de n date pentru a o "normaliza". Această metodă i se datorează lui Hurst, el folosind-o pentru a compara diverse fenomene. Fără această normalizare ar fi imposibil de comparat diferitele origini ale seriilor de timp.

Împreună, aceste idei au condus la formarea analizei R/S. Prin această analiză se reprezintă grafic pe abcisă logaritmul lui R/S (intervalului regradat, "rescaled range") iar pe ordonată logaritmul indicelui scării de timp n. Acest grafic arată o relație a lungimii normalizate pe diferite scări de timp. Această tehnică poate fi utilizată pentru extragerea a două tipuri de informații:

1. Exponentul Hurst, care descrie caracteristica fractală a seriei de timp şi caracterizează "persistența" seriei de timp. Acest exponent este o caracteristică importantă a comportării pieței pe un termen relativ scurt.

2. Perioada medie a ciclurilor neperiodice poate fi recunoscută prin utilizarea unei variante a analizei R/S, numită analiză V ("V-analysis"). Prin această analiză se studiază caracteristicile critice ale comportării pieței pe termen lung.

Exponentul Hurst şi structura fractală

Random walk şi mişcarea browniană
Einstein a făcut studii extinse asupra mişcării browniene şi studiul său a devenit modelul principal pentru random walk în statistică. Einstein a descoperit că distanța acoperită de o particulă aleatoare, care este supusă unor coliziuni aleatoare din toate părțile este strâns legată de rădăcina pătrată a timpului.

Aşadar: $R = k \times T^{0.5}$, unde R este distanța acoperită, k – o constantă şi T – indicele timpului.

Utilizând analiza R/S, Hurst a sugerat o mişcare browniană generalizată, care poate fi aplicată unei clase mai întinse de serii de timp. Această ecuație mai generală este: $R/S = k \times n^H$, unde R/S este distanța regradată ("rescaled range") sau raportul dintre lungimea maximă şi deviația standard ("range/standard deviation"), n – numărul de observații (timpul observației), k – o constantă a seriei de timp, H – *exponentul Hurst*. Deci, Hurst a generalizat legea $T^{0.5}$ la legea T^H. Analog, mişcarea browniană poate fi generalizată la o mişcare browniană fractală (sau fracțională).

Valoarea R/S este numită interval regradat ("rescaled range") şi este raportul dintre interval ("range") şi deviația standard pentru observație. La o creştere a timpului (n), aceasta ia o valoare care depinde de timp ridicat la puterea H. acesta este punctul cheie în analiza lui Hurst: prin modificarea scării, Hurst poate compara diverse tipuri de date, inclusiv perioade de timp care pot fi separate de mulți ani. De asemenea, acest tip de analiză, poate fi folosit pentru a descrie serii de timp care nu posedă nici o scară caracteristică. Această ecuație are o caracteristică a geometriei fractale: ia valori în funcție de o (funcție) exponențială.

Dacă sistemul analizat este independent distribuit sau are o mişcare aleatoare ("random walk"), se va potrivi ecuația lui Einstein (T la puterea 0.5), iar valoarea exponentului Hurst va fi 1/2.

H poate lua trei tipuri de valori:

- **H = 0.5**

Serii independente: sistemul urmează o mişcare aleatoare ("random walk") – şi atunci se folosesc proprietățile mişcării browniene. În acest caz, seriile sunt independente (zgomot brown, sau "Brown noise" sau mişcare browniană).

- **0 < = H < 0.5**

Serii antipersistente ("antipersistent series") sau zgomot roz ("pink noise"): sistemul acoperă o distanță mai mică decât în cazul mişcării aleatoare. Di această cauză are tendința de a schimba des sensul. Dacă creşte, este foarte posibil de a descreşte în perioada următoare; dacă descreşte, este foarte posibil să crească. O singură seri de timp a fost descoperită a avea această proprietate: volatilitatea pieței. Această proprietate poate fi înțeleasă prin termenul de efectul oglinzii ("mirror effect"): derivata unei serii de zgomot negru ("black noise") este o seri de zgomot roz, la fel cum derivata unei serii cu zgomot Brown este o seri cu zgomot alb ("white noise"). Din această cauză, din moment ce volatilitatea pieței poate fi legată de derivata seriei cu zgomot negru, ea are zgomot roz.

- **0.5 < H < = 1**

Serii persistente (zgomot negru sau "black noise"): aceste serii acoperă o distanță mai mare decât o mişcare aleatoare. Astfel, dacă un sistem creşte într-o anumită perioadă, este foarte probabil să crească în continuare în perioada imediat următoare. Această proprietate este denumit efectul Joseph. De asemenea, această serie are potențialul unor catastrofe neaşteptate, proprietate denumită efectul Noah.

Exponentul Hurst este o unealtă statistică robustă şi are următoarele proprietăți:

- Exponentul Hurst este un mijloc de măsurare a distribuției fractale. În această distribuție nu există o scară de timp caracteristică.

- Următoarele afirmații sunt considerate a fi echivalente pentru o serie de timp:
  1. Exponentul Hurst este bine definit pentru seria de timp.
  2. Seria de timp manifestă o mişcare browniană fracțională.
  3. Probabilitatea distribuției este stabilă (Paretian sau Levy).
  4. Panta graficului log n (pe abcisă), log R/S (pe ordonată) este o constantă.

- *1/H* este dimensiunea fractală a spațiului de probabilitate (Mandelbrot 1972).

Mişcarea aleatoare are dimensiunea fractală de 1/0.5 = 2. Ca urmare aceasta acoperă complet faza (perioada) spațiului.

- *2 – H* este dimensiunea fractală a seriilor de timp.

- $2 \times H - 1$ este rata de scădere a seriei Fourier; coeficienții Fourier scad în proporție cu $\frac{1}{f^{(2 \times H + 1)}}$.

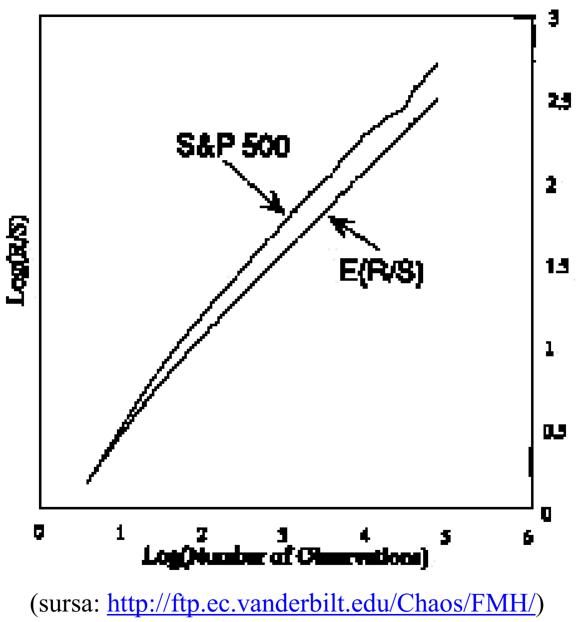
- Estimarea lui H poate fi găsită pe panta graficului logaritmilor lui R/S în raport de logaritmii lui n.

$$\log(R/S) = \log(k \times n^H) = \log(k) + H \log(n)$$

- Dacă nu există memorie de lungă durată, amestecarea datelor nu va avea nici un efect asupra estimării lui H. Dacă se distruge structura, punând la întâmplare datele, estimarea lui H va fi mult mai mică. De aceea, exponentul Hurst este o măsură a "memoriei" unui sistem.

- Studiile arată că varianța lui H (rădăcina pătrată a deviației standard) este 1/(n * t), unde n este indicele scării de timp, iar t – cantitatea totală de date. De aici, valori mari ale lui n reduc incertitudinea în măsurarea lui H. În acest fel, pentru statistica fractală, nu este nevoie de multe observații, ci de serii de timp lungi.

În graficul de mai jos este reprezentat R/S pentru randamentul pe intervalul de 3 minute S&P 500 între anii 1989 – 1992.

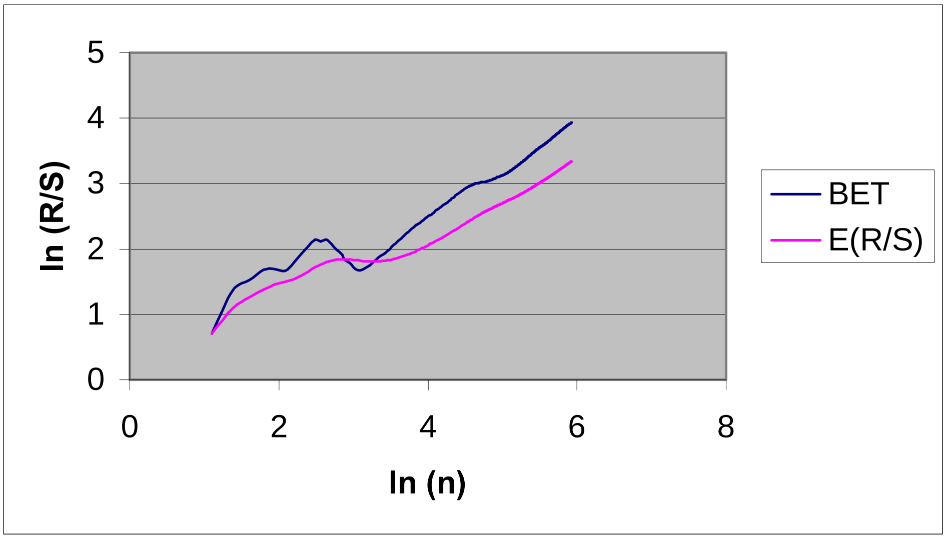


(sursa: http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/)

Se observă că:
- panta este relativ constantă;
- panta este aproximativ 0.603, care este semnificativ mai mare decât predicția prin EMH (care este de 0.5).

Limitele scării de timp. Cu toate că această metodă pare a se comporta bine pentru randamentul pe trei minute, randamentele pe termen lung ale pieței nu par a avea un exponent Hurst bine definit. Aceasta înseamnă că, pe perioade mai lungi de timp, randamentele pieței nu par a avea o mişcare browniană cu o memorie pe termen lung infinită, dar, în schimb, au o memorie pe un interval de timp finit. Deci, pentru analiza acestor randamente se studiază ciclurile neperiodice.

Pentru indicele BET:



Prin regresie rezultă: ln k = **- 0.030966, k = 0,96951; H = 0.64964.** Deci seria este persistentă.

Distribuția fractală

În 1960, Mandelbrot şi Fama au considerat că piețele speculative pot fi descrise de distribuții stabile sau Levy[3]. Acest set de distribuții include şi distribuția Gauss, dar de asemenea includ şi o varietate de distribuții fractale şi toate pot fi generate prin mişcarea browniană fracțională.

1. Distribuția stabilă. O distribuție este stabilă atunci când, prin înmulțirea a două versiuni cu distanțe regradate ("rescaled") ale acestei distribuții se obține o distribuție care este tot o versiune cu distanță regradată a distribuției originale. Cu alte cuvinte, dacă f este o distribuție stabilă, pentru orice A şi B, există un C astfel încât: $f(x/A) \times F(x/B) = F(x/C)$.

Numele de "stabil" este folosit din moment ce există efecte multiple, fiecare având această distribuție, rezultatul net, de asemenea, va avea această distribuție. Deci, aceste distribuții sunt singurele care pot "supraviețui" în sisteme care au numeroşi factori care contribuie la

[3] **Mark Sales, David McLaughlin, Fractals in Financial Markets, http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/main.html**

rezultatul net. Clopotul lui Gauss este un exemplu de distribuție stabilă, dar ea nu descrie mişcarea pieței. Distribuțiile stabile pot fi parametrizate cu patru parametri. Aceasta înseamnă că, ajustând continuu cei patru parametrii, toate distribuțiile stabile pot fi obținute. Din păcate, cu excepția a două sau trei cazuri speciale (cum este cazul distribuției lui Gauss), nici una dintre aceste distribuții nu poate fi exprimată într-o formă analitică.

2. Distribuția fractală. Aceasta are proprietatea că atunci când seria de timp corespunzătoare este reprezentată grafic, aceasta va avea o dimensiune fractală. Astfel, o serie de timp produsă de o distribuție fractală este (din punct de vedere statistic) independentă de scară ("scale independent"). Acesta este cazul distribuțiilor stabile (distribuția gaussiană este o excepție).

3. Mişcarea browniană fracțională. Apare în serii de timp care se supun regulii: $\frac{1}{f^{-b}}$. Aceasta înseamnă că atunci când seria lor Fourier scade cu o rată proporțională cu $\frac{1}{f^{-b}}$, unde f este frecvența seriei de timp, (variabila independentă într-un spațiu Fourier) şi b orice constantă. Există studii care au arătat că toate distribuțiile stabile pot fi generate prin mişcare browniană fracțională. Astfel, toate aceste idei corespund aceloraşi serii de timp.

Cicluri neperiodice şi analiza V ("V-analysis")

Pentru căutarea ciclurilor neperiodice este utilizată o variantă a analizei R/S numită analiza V ("V-analysis").

Ciclurile neperiodice sunt o generalizare a ciclurilor periodice. Un "val" sinusoidal (o sinusoidă) are perioada 2π. Seriile de timp aleatoare au tendința periodicității, dar perioada, este mai probabil, să fie aleatoare decât fixă. Deci, în locul unei perioade care are o valoare fixă, bine definită de 2π, perioada poate varia la fiecare ciclu în funcție de o distribuție aleatoare. În anumita cazuri, distribuția aleatoare poate avea o formă gaussiană şi ca urmare, aceasta va avea o medie şi o variantă bine definite. În acest caz, se spune că seria de timp conține cicluri neperiodice. Astfel, o seri de timp conține cicluri neperiodice dacă are:
- o perioadă medie şi
- o anumită deviație de la medie pentru această perioadă.

Mişcarea browniană fracțională nu îndeplineşte aceste cerințe. Deşi mişcarea browniană fracțională oscilează între valori mari şi mici, nu există o perioadă medie şi din acest motiv ea nu conține cicluri neperiodice.

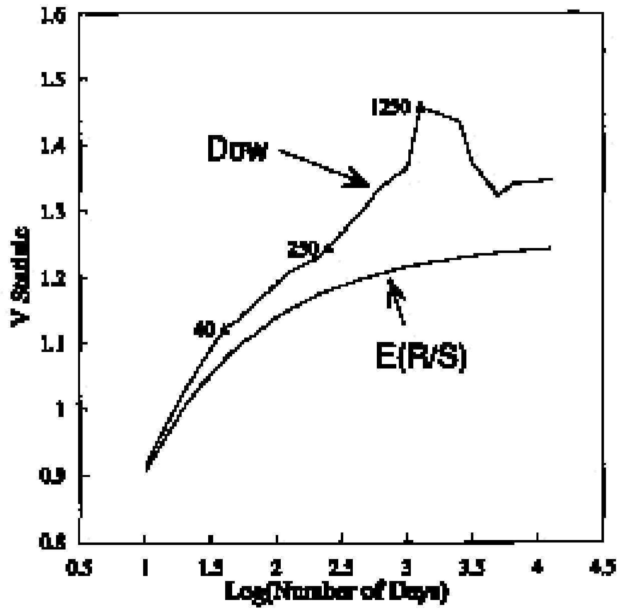
Folosind analiza R/S, se observă că, pe termen scurt, piața are un exponent Hurst bine definit şi de aici apare a fi o mişcare browniană fracțională. De aici rezultă că pe intervale scurte de timp, nu este probabil de definit un ciclu al pieței. Dar, pe termen lung, comportarea pieței este diferită. Diferența poate fi observată definind V-statistic: $V = \frac{(R/S)}{\sqrt{n}}$.

Această analiză este foarte apropiată de analiza R/S cu următoarele excepții:
1. Coeficientul R/S este folosit pe axa Y şi nu este folosit logaritmul său;
2. R/S este divizat de rădăcina pătrată a timpului, şi din această cauză, mişcarea browniană va avea o pantă netedă (dreaptă).

Axa X rămâne definită la fel ca în analiza R/S, ca logaritm din scara de timp ("time scale index"). Această variabilă a fost aleasă pentru a se putea observa caracteristicile seriilor de timp care apar ca "scări de timp caracteristice" ("characteristic time-scale") de dimensiune n. O perioadă este un exemplu a unei asemenea caracteristici. Deci, intuitiv, ne aşteptăm, că analiza R/S va fi aptă să ne arate ciclurile în seriile de timp. O dovadă a acestui lucru este mişcarea browniană fracțională.
Aceasta:
- nu prezintă cicluri;
- într-un grafic R/S are o pantă constantă.

De aici, cel puțin în cazul mişcării browniene fracționale, analiza R/S pare a fi capabilă să recunoască absența oricărei comportări ciclice. Deci, cel puțin la prima privire, R/S-statictic pare capabil să facă distincția dintre seriile de timp ciclice şi cele neciclice. V-statistic este folosit pentru a amplifica semnalele, variațiile ("bumps") care există într-un grafic datorită comportării ciclice.

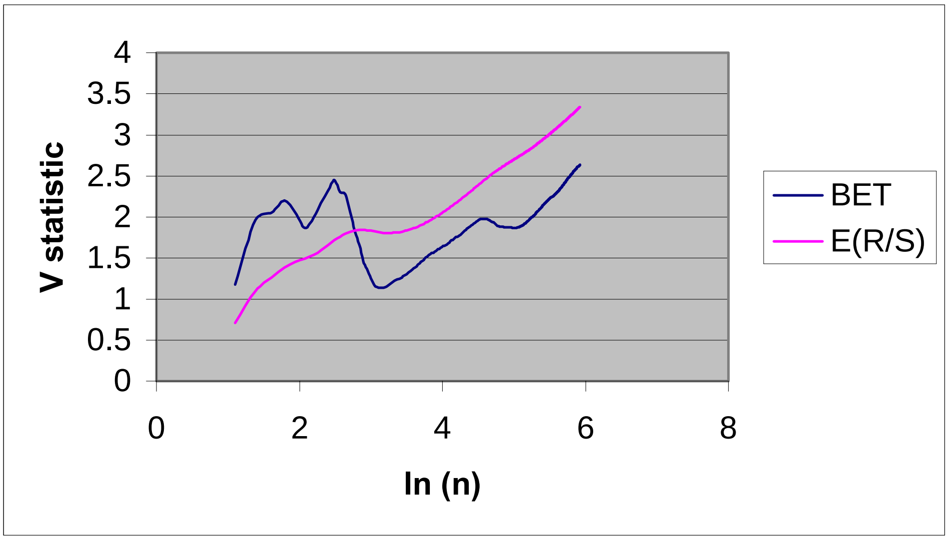
În graficul de mai jos este prezentată analiza V pe baza randamentelor zilnice ale indicelui Dow Jones Industrials (DJIA) în perioada 2 ianuarie 1888 – 31 decembrie 1991.



(sursa: http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/)

Graficul superior prezintă un vârf pronunțat în jurul a 1250 zile lucrătoare – în jur de 4 ani – sugerând un ciclu de o perioadă medie de această lungime. Al doilea grafic, E(R/S), este modul cum ar arăta graficul datorită mişcării browniene. Deci, în comportarea pe termen lung, piața nu pare a urma o mişcare browniană fracționară, ci pare a fi descrisă de cicluri. Din moment ce exponentul Hurst este o măsură a memoriei sistemului, şi din moment ce ciclurile demonstrează un exponent Hurst prost definit ("ill-defined"), perioadele ciclului sunt o măsură a lungimii memoriei sistemului.

Pentru indicele BET:



Din grafic rezultă că ciclul mediu este de 11.9999 zile, aproximativ 12 zile. Este posibil ca rezultatul să fie eronat datorită numărului mic de observații (datorat duratei mici de existență a indicelui BET).

3. Concluzii FMH

Analiza R/S şi exponentul Hurst pot fi folosite pentru a obține informații despre caracteristicile fractale ale pieței şi analiza V pentru determinarea ciclurilor neperiodice pe termen lung. Pe baza observațiilor empirice, se poate formula o ipoteză privind comportarea pieței.

Rezultate empirice:
1. Exponentul Hurst este stabil pentru comportarea pieței pe termen scurt. Adică, el pare a fi o caracteristică bine definită a pieței. Aceasta conduce la afirmația că, comportarea pieței pe termen scurt urmează o distribuție stabilă Levy sau Paretian(-ă).
2. Exponentul Hurst pentru seriile de timp ale pieței este întotdeauna mai mare decât 0.5. deci, piața (evoluția ei) este o serie de timp persistentă, şi prin urmare prezintă efectele Joseph şi Noah.
3. Comportarea pe termen lung a pieței nu are un exponent Hurst bine definit, ci în schimb, este caracterizată prin cicluri.
4. Din moment ce stabilitatea exponentului Hurst este în strânsă legătură cu memoria seriei de timp, **piețele au o memorie lungă, dar finită**. De exemplu, randamentul indicelui S&P 500 pare a fi aproape neafectat de randamentele avute cu patru ani în urmă.

Ipotezele FMH:

1. **Ipoteza orizontului de investiție**: fiecare investitor are o anumită perioadă pe care investeşte, numită orizontul investiției. Informația este evaluată în concordanță cu orizontul investiției.

Analiza R/S arată că distribuția randamentelor pieței pe termen scurt este fractală, ceea ce necesită o structură similară cu ea însăşi. Această ipoteză explică această structură prin orizonturi de investiție multiple ale investitorilor. Adică, prezența investitorilor care investesc pe orizonturi de timp diferite la orice scară de timp face probabilitatea distribuției independentă de scara de timp (“time-scale independent”), ceea ce este, cu siguranță, o caracteristică a unei distribuții fractale.

2. **Ipoteza lichidității**: piața este stabilă atunci când, în cadrul ei, acționează investitori care acoperă un număr mare de orizonturi de investiție.

Lungimea orizontului de investiție determină scara de timp la care investiția este fractală. Dacă orizontul de investiție se întinde uniform (logaritmic) de la câteva minute la câțiva ani, atunci, distribuția probabilității va fi fractală şi ca urmare stabilă în această întindere. Dacă toți investitorii investesc pe orizonturi de timp pe termen scurt, atunci distribuția fractală îşi va pierde structura fractală pentru scări de timp mai mari, ceea ce o va face instabilă.

3. **Ipoteza îngustării**: când informațiile fundamentale (obținute pe baza analizei fundamentale) devin incerte, investitorii pe termen lung îşi îngustează orizonturile de investiții, făcându-le mai uniforme.

4. **Ipoteza crizei**: piața devine instabilă atunci când investitorii au un orizont de investiții uniform (din moment ce fluctuațiile mici sunt amplificate de interesele pe termen scurt, fără a mai exista influențe stabilizatoare pe termen lung). Această este opusul ipotezei lichidității.

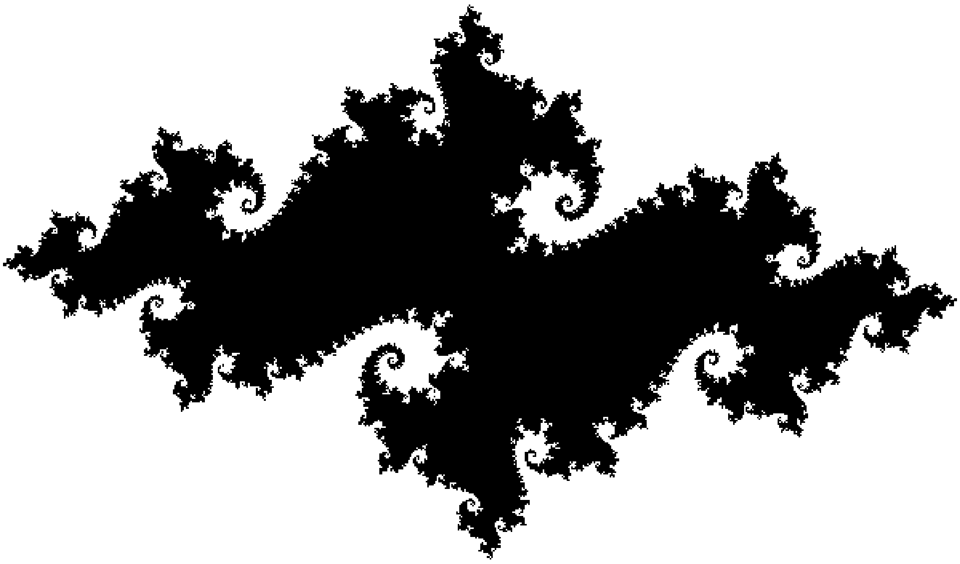
5. **Ipoteza separării pieței**: dacă piața nu este afectată puternic de ciclul economic de ansamblu, atunci nu va exista un trend pe termen lung şi vor domina informațiile pe termen scurt.

Ciclurile pe termen lung, care au fost observate în cazul indicelui DJIA, nu sunt universal valabile (nu este obligatoriu să apară). Această ipoteză se referă la acele cazuri în care nu există cicluri la nici o scară de timp. Această ipoteză pare a se aplica tranzacțiilor valutare.

Aplicații: matematica distribuțiilor fractale este substanțial mai complexă decât matematica distribuțiilor normale, şi tehnicile utilizate pentru optimizarea portofoliilor sunt foarte complexe şi încă neînțelese pe deplin. Dar analiza fractală oferă în schimb o evaluare mai precisă a riscului şi a randamentului aşteptat dacât modelele mai vechi, dar nu este încă clar dacă optimizarea portofoliului folosind tehnici fractale este sau nu substanțial mai bună decât optimizarea portofoliilor folosind metodele tradiționale ale analizei statistice.

Anexă – Fractali

De exemplu, în figura de mai jos este prezentat graficul Julia. Acesta este graficul rezultatului introducerii de diferite numere complexe în funcția $f(x) = x^2 + c$.

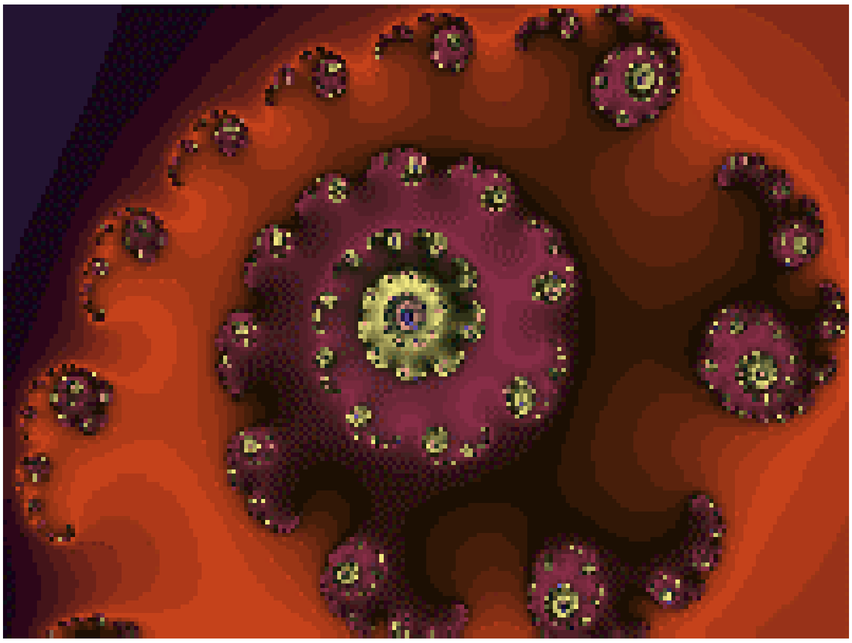


(Sursa: http://www.gate.net/~svaughen/chaos)

Proprietățile acestui grafic sunt următoarele:

1. Perimetrul graniței este infinit;
2. Are similaritate la orice scară (mărind o porțiune rezultă acelaşi grafic);
3. Granița este impredictibilă (haotică) deşi este rezultatul unei funcții simple;
4. Definită matematic, granița are o dimensiune fracțională;
5. Deşi este rezultatul unei formule matematice "oarbe", are o calitate estetică.

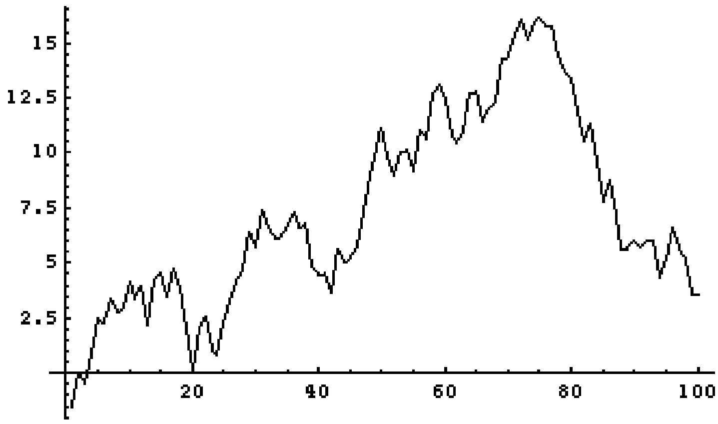
În graficele de mai jos şunt prezentați diferiți fractali:



(Sursa: http://www.gate.net/~svaughen/chaos)

Aceste imagini sunt interesante deoarece culorile şi formele sunt rezultatul unor formule matematice ca de exemplu funcția f(x) de mai sus. Fiecare punct din figură corespunde unui număr complex. Un computer calculează rezultatul funcției pentru diferite numere complexe. Valorile pentru care funcția tinde la infinit sunt colorate în funcție de rata la care se apropie de infinit. Valorile care tind la zero sunt colorate în negru.

Alte tipuri de fractali:



Bibliografie

- Mark Sales, David McLaughlin, Fractals in Financial Markets, http://ftp.ec.vanderbilt.edu/Chaos/FMH/main.html
- Jamal Munshi, Fractal Structure of Capital Market, http://munshi.sonoma.edu/working/
- Introduction to Fractals and Chaos Theory, http://www.gate.net/~svaughen/chaos
- The Fractal Market hypothesis Proposes the Following, http://www.phase-locked.com/faqs
- Stocks, Horses, Chaos and Efficient Markets, http://www.maths.tcd.ie/pub/enconrev/ser/html